VITTORIO EM. III

NAZIONALE
B. Prov.
IV
498
VITT. EM. III
BIBLIOTECA
NAPOLI

14.C.70

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

5.

14940

3.I.10

B. Prov.
IV
198

61394hh SBN

DIE

PRINCIPIEN DER MECHANIK

HISTORISCH UND KRITISCH

DARGESTELLT.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

EINE VON DER PHILOSOPHISCHEN HONOREN-FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

GEKRÖNTE PREISSCHRIFT.

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

VON

PROF. DR. HERMANN KLEIN,

LEHRER DER MATHEMATIK UND PHYSIK AM VITZTHUMSCHEN GYMNASIUM ZU DRESDEN.

LEIPZIG

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

VORREDE.

„Je tiefer man eindringt in das Wesen der Naturkräfte, desto mehr erkennt man den Zusammenhang von Phänomenen, die lange, vereinzelt und oberflächlich betrachtet, jeglicher Anreihung zu widerstreben schienen; deste mehr werden Einfachheit und Gedrängtheit der Darstellung möglich."

Alex. von Humboldt (Kosmos I. p. 30).

Die Tendenz der Behandlung der mechanischen Principien in der vorliegenden Schrift ist gegeben durch die Aufgabe, welche von der philosophischen Honoren-Facultät der Universität zu Göttingen für die Preisbewerbung der Beneke'schen Stiftung zur Förderung des Studiums der Philosophie gestellt worden ist. Diese Aufgabe lautet:

„Die Facultät wünscht eine kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Sie bezeichnet die Zeit Galilei's als den geeigneten Anfangspunkt der Darstellung und erwartet nur einleitungsweise die Leistungen der antiken Mathematik und Mechanik, nicht die Theorien der speculativen Philosophie des Alterthums, in der zum Verständniss nöthigen Ausdehnung erörtert zu sehen.

Die geschichtliche Seite der Arbeit würde zu zeigen haben, wann, von wem und auf Veranlassung welcher bestimmten Aufgabe jedes einzelne der wesentlichen Principien der Mechanik zuerst aufgefunden und ausgesprochen, wann, durch wen und auf Veranlassung welcher andern bestimmten Bedürfnisse oder Untersuchungen der ursprüngliche Ausdruck der Theoreme verändert, be-

richtigt oder früher vereinzelte zu einem allgemeineren Princip zusammengezogen worden sind. Hierbei verlangt die Facultät zwar kein weitläuftiges Eingehen auf die verschiedenen Anwendungen der Principien, legt jedoch Werth auf die Erwähnung der Originalbeispiele, an denen ihre jedesmalige Fassung zuerst erprobt worden ist.

Die kritische Seite der Arbeit, deren äusserliche Trennung von der historischen oder völlige Verschmelzung mit dieser dem Geschmack und Ermessen der Bearbeiter überlassen bleibt, würde zu zeigen haben, wie viel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbstverständlicher logischer Grundsatz, wie viel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundsatzes, wie viel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache, wie viel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungserkenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist.

Die Facultät erwartet, dass im geschichtlichen und im kritischen Theile nicht ausschliesslich die Arbeiten der Mathematiker und Physiker, sondern auch der nützliche und schädliche Einfluss der innerhalb des zu schildernden Zeitraumes aufgetretenen philosophischen Theorien berücksichtigt werde. Um aber den Umfang der Aufgabe zu ermässigen, verzichtet die Facultät auf Berücksichtigung der eigentlich physischen Theorien und Hypothesen über die Constitution der wirklichen Körper und die Natur der wirklichen Ereignisse, sowie auf die Erörterung der chemischen Processe, des organischen und des psychischen Lebens; sie überlässt dem Bearbeiter, anhangsweise die Richtungen anzugeben, nach denen bisher die allgemeinen mechanischen Principien Eingang in diese Gebiete gefunden haben. Sie wünscht dagegen die Darstellung so weit fortgeführt, dass sie die neuen Vorstellungsweisen noch einschliesst, welche über den Begriff von Naturkräften, über

ihre Wirkungsweisen und den Uebergang ihrer Wirkungsformen in einander sich hauptsächlich an die Untersuchungen über das mechanische Aequivalent der Wärme geknüpft haben."

Die Behandlung der Principien ist in zwei Abtheilungen getheilt, von denen die erste (p. 12 bis p. 44) die historische und die zweite (p. 45 bis p. 117) die kritische Betrachtung enthält.

In der Arbeit ist eine Mitberücksichtigung der philosophischen Gedankenkreise, welche die Facultät gewünscht hatte, nicht unternommen worden.

Die Schrift weicht bis auf kleine Erweiterungen und Abkürzungen nur im Folgenden von der eingeschickten Arbeit ab. Ausführlicher, aber ohne eigentliche Aenderung, ist behandelt worden der Ausgangspunkt der kritischen Darstellung, um auch die sachlichen Grundsätze einer genaueren Erörterung zu unterziehen. Hierbei ist, um nicht zu weit in das philosophische Gebiet zu kommen, von dem Postulat einer Materie mit daran haftenden Kräften ausgegangen und die Gültigkeit des Causalprincips als eine für die Naturwissenschaften nöthige Hypothesis genommen worden. Noch zu erwähnen ist eine Abkürzung, welche die Behandlung des Princips der Erhaltung der Kraft erfahren hat, indem einige Seiten der Arbeit gestrichen worden sind, welche sich auf die Stellung des Principes zu den Grundhypothesen und auf dessen Deduction bezogen haben.

Dresden, im September 1872.

Hermann Klein.

INHALT.

Einleitung.

Seite.

Arithmetik des 17. Jahrhunderts 1
Geometrie „ „ „ 3
Entwickelungsgang der Mechanik 5

Historische Darstellung der Principien.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 12
Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft 17
Princip der Erhaltung des Schwerpunktes 25
Princip der Erhaltung der Flächen 27
Princip der kleinsten Wirkung 30
D'Alembert's Princip 34
Princip des kleinsten Zwanges 39
Princip der Erhaltung der Kraft 40

Kritische Darstellung der Principien.

Ausgangspunkt der kritischen Darstellung 45
Princip der Erhaltung der Kraft 60
Princip der virtuellen Geschwindigkeiten 83
D'Alembert's Princip 92
Zusammenhang der noch folgenden Principien mit den erörterten 97
Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft 99
Princip der Erhaltung des Schwerpunktes 108
Princip der Erhaltung der Flächen 111
Princip der kleinsten Wirkung 113
Princip des kleinsten Zwanges 115

Schluss.

Uebertragung der Principien auf chemische Processe 117
Uebertragung der Principien auf Processe des organischen Lebens 120

BIBLIOTECA PROVINCIALE
DI
NAPOLI

Wenn das Verdienst eines einzelnen Gelehrten, welches sich derselbe um die Erweiterung der Kenntnisse in einem Wissenschaftszweige erworben hat, gehörig gewürdigt werden soll, oder wenn es gilt zu zeigen, wodurch während einer bestimmten Zeitperiode das Gebiet einer Wissenschaft vergrössert worden ist, so bedarf es vor Allem der völligen Klarheit über den vorgefundenen Standpunkt des betreffenden Wissenschaftstheiles, auf dem dieser einzelne oder beziehentlich die Forscher jener Zeit mit Erfolg weiter bauen konnten, oder auch darüber, ob überhaupt schon ein sicherer Grund für solchen Fortbau gelegt war. Es ist nun zwar das Angedeutete nicht die eigentliche Aufgabe dieser Arbeit, sondern es sollen ganz bestimmte Errungenschaften auf dem Gebiete der Mechanik historisch und kritisch erörtert werden. Dennoch aber, da die hier anzustellenden Untersuchungen sich zu verbreiten haben über die Forschungen, welche von einer bestimmten Zeit an gemacht worden sind, ist es nöthig, die Kenntniss allgemeiner Gesetze, welche man sich in der Zeit, die vor der zu betrachtenden liegt, erworben hatte, einer Erörterung zu unterziehen, um zu verstehen, wie so eingreifende Resultate in einem überaus kleinen Zeitraume in so rascher Folge gefunden werden konnten. Ferner müssen wir, obgleich es sich hier nur handelt um einen bestimmten Theil der angewandten Mathematik, den Stand der Kenntnisse in der reinen Mathematik darlegen, da ja diese das Fundament der angewandten bildet, und bei einer so conservativen Wissenschaft wie die Mathematik, welche die Arbeiten früherer Perioden nie zerstört, um an ihrer Stelle neue aufzuführen, ist es begreiflich, dass man eine Zeit nicht ohne Beziehung zur Vergangenheit betrachten kann.

Unerörtert bleibt, welches Volk die ersten Sätze der Mathematik aufgestellt hat, welches dieselben später gelernt oder auch noch einmal entdeckt hat, nur soviel sei erwähnt, dass

die Mathematik ihren Ursprung wohl nicht praktischen Forderungen ägyptischer Staatswirthschaft, sondern dem idealistischen Bedürfnisse geistig begabter Männer zu verdanken ist. Auch kümmern wir uns nicht um die oft schneller dann wieder langsamer fortschreitende Entwickelung, sondern nur um den Stand am Anfang des 17. Jahrhunderts.

Weit vorgeschritten war man bereits in der Kenntniss der Algebra. Als deren Begründer müssen wir Diophantus (365 a. c.) nennen; denn obgleich man vor ihm schon Aufgaben lösen konnte, die man jetzt leicht mit Hilfe der Algebra behandelt, so hat doch er zuerst die algebraische Methode angegeben mit allerdings noch ziemlich unbeholfenen Bezeichnungen.

Ein nicht geringes Verdienst um diesen Theil der Arithmetik ist es deshalb, dass Vieta (1540—1603) statt der damals üblichen Zahlzeichen allgemeine, d. h. Buchstaben in die Gleichungen einführte. So konnte es denn nicht fehlen, dass dieser auch schon Gleichungen vom 3. und 4. Grade aufzulösen lehrte. Die Leistungen dieses Mannes können nicht leicht zu hoch angeschlagen werden, denn während man bis dahin nur die Lösung der Aufgaben mit bestimmten Zahlen finden konnte, so erhält man nun die allgemeiner Aufgaben.

Man erkannte auch dann sofort den Weg, welchen man einschlagen muss, um vom Bekannten zum Unbekannten zu gelangen, also die sogenannte analytische Methode. Natürlich musste man die Transformation der Gleichungen gelernt haben, welche von Vieta schon die Präparation derselben genannt worden ist, als da ist die Entfernung der Brüche und Wurzeln.

Nachdem nun also der Weg gebahnt war, konnten die Entdeckungen auf dem Gebiete der Algebra schnell auf einander folgen. Man war nicht zufrieden, Methoden aufgefunden zu haben, wie man Gleichungen des 3. und 4. Grades behandeln müsse, sondern man versuchte schon die Lösung der Gleichungen von höherem Grade, deren genauere Untersuchung nun aber zum grössten Theile der Zeit angehört, deren Betrachtung die eigentlich vorgeschriebene ist.

Auf der anderen Seite war man auch darauf bedacht, die nöthigen numerischen Rechnungen sich zu vereinfachen. Ein Hilfsmittel dazu wurde gefunden von dem schottischen

Edelmann Neper de Marchiston (1550—1618) in den Logarithmen, deren Werthe dann weiter von Briggs bis zu der nöthigen Genauigkeit bestimmt und in Tafeln zusammengestellt wurden. Hier muss sogleich erwähnt werden, dass auch die Berechnung und die Zusammenstellung der trigonometrischen Logarithmen sich den genannten Tafeln bald anschloss; denn Edward Gunther berechnete dieselben für die Sinus und Tangenten und veröffentlichte 1620 die ersten Tafeln der Logarithmen dieser Functionen für alle Grade und Minuten im ersten Quadranten.

Auch waren die Rechnungsarten soweit ausgebildet, dass man allgemeine Potenzen einführen konnte. In Bezug darauf ist dem berühmten Descartes ein grosses Verdienst beizulegen; denn dieser ist es, der zuerst die Potenzen durch ihre Exponenten so bezeichnet hat, wie wir es noch thun und der auch schon das Verfahren angegeben hat, die Wurzeln in Reihen zu entwickeln. An die weitere Untersuchung der Potenzen knüpfen sich rühmlichst die Namen Pascal, Huygens. Nicht lange liess die weitere Verallgemeinerung der Potenzen auf sich warten, so dass man schon seit Wallis 1655 unterscheidet Potenzen mit gebrochenen und negativen Exponenten.

Hieran knüpfen sich die Untersuchungen anderer Reihen als derjenigen, in welche man die Potenzen entwickelt hatte. So beschäftigte sich schon Fermat (1590—1663), dessen genaue Kenntniss der Zahlen nicht hoch genug geschätzt werden kann, mit den figurirten Zahlen, und auch fand die Ausbildung der continuirlichen Brüche eifrige Verehrer, so unter anderen den Pascal.

Wie man in den einzelnen Theilen der Arithmetik bedeutende Forschungen gemacht und dieselbe nach allen Seiten hin weit ausgebildet hatte, so war man gleichfalls auf dem Gebiete der Geometrie nicht zurückgeblieben, sondern hatte, wenn auch in Zwischenräumen, den von den Griechen rühmlichst angebahnten Weg weiter betreten und die Geometrie zu den schönen Höhen geführt, die zu betreten den Mathematikern des 17. Jahrhunderts vergönnt war.

Nicht genug, dass man die gegenseitige Lage gerader Linien, die Flächen, welche von geraden Linien eingeschlossen werden und den Kreis einer genauen Betrachtung un-

terworfen hatte, ging man auch schon frühzeitig an die Untersuchung vieler krummen Linien. Die Kegelschnitte waren ein bekannter Gegenstand, und mit welchem Erfolg andere Curven untersucht worden sind, dürfte bewiesen sein dadurch, dass wir noch jetzt viele geometrische Orte durch ihre Benennung dankbarst auf die alten Mathematiker zurückführen. Wir haben z. B. eine Spirale des Archimedes, die Conchoide des Nicomedes, die Cissoide des Diokles. Selbstverständlich musste die Trigonometrie im hohen Grade ausgebildet sein zu den mancherlei geometrischen Rechnungen.

Auch hatte schon der grosse Philosoph Descartes (1637) den wichtigen Schritt gethan, die Geometrie mit der Arithmetik zu verschmelzen, indem er die Mittel angab, wie man Linien von einfacher und doppelter Krümmung ausdrücken kann durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ihrer Punkte, also die Natur krummer Linien in sogenannte Formeln zu fassen und dadurch dem Calcul zu unterwerfen, wodurch der Fortgang der Mathematik und aller von ihr abhängigen Wissenschaften mehr als durch irgend eine andere Entdeckung gefördert worden ist. Da musste nun, weil, wie oben bereits erwähnt, die Theorie der Gleichungen schon sehr entwickelt worden war, die der Curven leicht ausgebildet werden und die analytische Geometrie, wie man die Methode des Descartes nannte, führte bald zu einer Fülle neuer Sätze und neuer Principien, die weit über das hinausgingen, was auf der von den Alten betretenen Bahn je zu erreichen gewesen wäre.

Wichtig war es, dass man das Problem der Tangenten, ein Problem, welches die Alten zwar in speciellen Fällen gelöst hatten, das aber jetzt in principieller Allgemeinheit auftrat, besonders genauer Betrachtung unterwarf. In Bezug darauf erwähne ich nur, dass Roberval (1602—1675) die Tangenten für 13 Curven untersuchte, indem er das Parallelogramm der Geschwindigkeiten dazu verwendete. So konnte es nicht ausbleiben, dass Newton die Methode der Fluxionen erfand und gleichzeitig Leibnitz die Differential- und Integralrechnung, beide von verwandten, aber doch verschiedenen Principien ausgehend und zu demselben Ziele führend. Insbesondere schuf Leibnitz mit genialem philosophischen Blicke einen Formalismus oder nach dem

Sprachgebrauch der Mathematiker einen Algorithmus, einen eigenthümlichen Calcul, durch welchen man weit schneller als früher, wenn man nicht die Art, wie Archimedes die Flächen betrachtete, für etwas Aehnliches halten will, zu einer umfassenden und klaren Einsicht in die Raumgebilde kam und durch dessen Anwendung die schwierigsten Probleme, an denen sich die bisherigen Forscher vergeblich oder nur mit wenig Erfolg abgemüht hatten, mit einem Schlage und dazu mit wunderbarer Leichtigkeit gelöst wurden.

Doch es kann nicht die Absicht sein, die Fortschritte auf dem Gebiete der reinen Mathematik noch genauer zu verfolgen; denn ich denke mit dem Gegebenen den Standpunkt dieser Wissenschaft im 17. Jahrhundert genug gekennzeichnet zu haben, um zu begreifen, wie nun die Mathematik schnellere Fortschritte machen konnte als zu irgend einer Zeit. Mit Begeisterung ergriffen die jüngeren Mathematiker jener Zeit die neuen Methoden. Jedes Problem, das bisher aufgestellt war, wurde lösbar oder erschien in einem anderen Lichte, neue Aufgaben von bisher ungeahnter Tiefe und Allgemeinheit tauchten auf und enthüllten neue wunderbare Eigenschaften der Zahlen und der Raumgrössen.

Für das Verständniss der im Folgenden anzustellenden historischen Betrachtung der mechanischen Principien ist es noch nothwendig, einer neuen Verallgemeinerung der mathematischen Principien zu gedenken. Es gehörte ein so grosser Mathematiker wie Euler dazu, um den analytischen Calcul von allen geometrischen Fesseln zu befreien und damit die Analysis als selbstständige Wissenschaft zu begründen durch Einführung des Begriffs der Function.

Anders verhält sich der Entwickelungsgang des einen Theils der angewandten Mathematik, der Mechanik. Wir werden finden, dass die Kenntnisse in diesem Wissenschaftszweige weit hinter denen im eben erörterten zurückstehen und dass wir es hier noch mit den ersten Anfangsgründen zu thun haben, ja dass noch Irrthümer und vorgefasste Meinungen zurückzuweisen sind.

Wir müssen leider bekennen, dass die Griechen, die wackeren Vorkämpfer auf dem Gebiete der Mathematik, sich in Bezug auf Mechanik sehr früh von der wahren Bahn entfernten und dass sie sich in ein weites Feld von Irrthümern

verloren, so dass man wohl mit Recht behaupten kann, dass die eigentliche Theorie dieser Wissenschaft ihnen völlig fremd geblieben ist.

Dass die Alten aber auch ohne Theorie schon sehr sinn- und kunstreiche Instrumente ausgeführt haben, ist uns aus ihren Schriften, vorzüglich aus Vitruv's 10 Büchern bekannt, wo eine grosse Anzahl sehr zusammengesetzter Maschinen aufgezählt werden, die wahrscheinlich schon vor des Verfassers Zeit bekannt waren. Die grossen Steinmassen und Säulen, welche die Architekten des berühmten Tempels zu Ephesus, Ctesiphon und Metagenes, aus sehr entfernten Steinbrüchen holen liessen, die noch grösseren Lasten, welche die alten Aegypter zur Errichtung ihrer Pyramiden auf so bedeutende Höhen zu bringen wussten, die colossalen Gebäude der Römer, die Wasserleitungen, deren weitgespannte Bogen über Flüsse und Thäler wegsetzten, und andere Denkmäler des Alterthums sind hinlängliche Zeugen, dass die eigentliche Instrumentalmechanik schon in früheren Zeiten zu einer grossen Vollkommenheit gebracht sein musste. Alle Versuche aber, die Erscheinungen zu erklären, führten bei ihnen, selbst bei den sonst so scharfsinnigen Philosophen, wie Plato und Aristoteles, auf dunkle und unbestimmte abstracte Begriffe, und dann war es ihnen Aufgabe, diese Worte zu erklären, was sie meist ohne Berücksichtigung der äusseren Erscheinungen thaten. Auf diesem falschen Wege irrten beinahe alle Forscher auf dem Gebiete der Mechanik bis zu Stevinus.

Damit soll aber nicht geleugnet werden, dass die Griechen sich eifrig bemüht haben, physikalische Theorien zu entwerfen. Wir finden bei ihnen die Keime für manche Vorstellungen, die unseren neueren Theorien zu Grunde liegen, ich brauche nur an die Elemente, die Atome, den Aether zu erinnern, lauter Begriffe und Ausdrücke, die wir den verschiedenen philosophischen Schulen des griechischen Alterthums verdanken, wenn auch schon ihre Bedeutung in der heutigen Physik von dem abweicht, was sich die Alten bei diesen Worten gedacht haben. Wir haben aber im Alterthum eine grosse Anzahl von naturphilosophischen Systemen, einzelne nach klaren Begriffen durchgearbeitete physikalische Theorien finden wir nicht. Die grosse Bedeutung, welche

der Bewegung bei den Vorgängen in der Natur zukommt, wurde zwar von den alten Griechen erkannt und deutlich ausgesprochen, wir brauchen in dieser Beziehung nur an den Ausspruch des Heraklit zu erinnern, dass Alles in Bewegung, Alles im Fluss sei; auch die bewegende Kraft tritt uns in den mannichfaltigsten Formen entgegen, bald als der beherrschende Geist (*νοῦς*) bei Anaxagoras, bald als treibende Liebe (*φιλία*) bei Empedokles. Doch von diesen mehr poetischen und schwunghaften Ausdrücken, welche sowohl die körperliche als auch die geistige Welt erklären sollten, zu dem allerdings viel nüchternern Kraftbegriff, wie ihn die heutige Mechanik gebraucht, ist ein sehr grosser Schritt.

Ein anderes Urtheil müssen wir fällen über Archimedes, den man wohl den eigentlichen Gründer der theoretischen Mechanik nennen darf; denn Aristoteles hat, obgleich man noch im Mittelalter seine Lehren als unumstössliche Wahrheiten betrachtete, doch nur einen schwachen Versuch der Forschung gemacht. Archimedes, der erste Geometer seiner und vielleicht aller Zeiten, hatte sich genaue Kenntniss über das Gleichgewicht am Hebel verschafft, indem er als mechanischen Grundsatz oder wenigstens als ein Princip der Erfahrung nimmt das Gleichgewicht gleicher Kräfte an gleichen Hebelarmen und daraus das allgemeine Gesetz für commensurabele und incommensurabele Kräfte deducirt. Auch hat Archimedes schon die Theorie des Schwerpunktes gekannt und denselben für Linien, Flächen und Körper zu bestimmen gewusst, womit eine der wenigen Lehren berührt ist, an denen man im Mittelalter festhielt und die man noch weiter ausbildete. Bekannt ist, dass derselbe auch ein richtiges Urtheil hatte über den Gewichtsverlust im Wasser untergetauchter Körper, eine Kenntniss, die er zu verwerthen wusste zur Bestimmung des specifischen Gewichtes. Eine wie klare Kenntniss über mechanische Vorgänge Archimedes gehabt, beweist der Ausspruch desselben, dass er die Erde aus ihrer Stelle bewegen könne, wenn er einen festen Standpunkt hätte.

Obgleich nun also hiernach ein richtiger Anfang gemacht worden war, so blieb man doch nur dabei stehen, ja man vergass beinahe zwei Jahrtausende lang die richtige Methode. Keiner der Nachfolger wies auf eine Kraft hin als eine Ur-

sache der Bewegung, sondern sie behaupteten wie Aristoteles, die Körper hätten den Grund der Ruhe und Bewegung in sich selbst, es fiel keinem ein, zu unterscheiden zwischen dem, was eine Bewegung hervorbringt, und dem, was sie erhält, sondern man hielt mit einer bewundernswerthen Strenge an den unbestimmten Begriffen des Aristoteles fest, man theilte noch im Mittelalter alle Bewegungen in drei Arten. Man unterschied nämlich die Bewegung als eine 1) willkürliche, d. h. gleichförmige Kreisbewegung, welche zugleich als die vollkommenste und deswegen als ursprüngliche gehalten wurde, 2) natürliche, d. h. solche, die immer schneller wird, 3) gewaltsame, d. i. die, unter welche alle anderen zusammengenommen sind. Ebenso unbestimmt sprach man von den Körpern in Bezug auf ihre Schwere, indem man den den schwereren nannte, der schneller fällt.

Diese Begriffe waren so festgewurzelt, dass Galilei, der anfänglich noch die Ansicht des Aristoteles von der Ursprünglichkeit der Kreisbewegung theilte *(Dial. 1)*, durch seine Behauptung, dass die Geschwindigkeit der Körper beim Fall nicht proportional dem Gewichte, sondern der Zeit sei *(Dial. III. 91)*, obgleich er seine Lehrer durch zahlreiche Experimente von der Wahrheit seiner Behauptung zu überzeugen suchte, indem er Körper der verschiedensten Art vom Thurme des Domes zu Pisa fallen liess, um sich Verfolgungen seiner Theoreme wegen zu entziehen, Pisa verliess und nach Padua übersiedelte.

Es ist auch noch zu erwähnen, dass besonders gegen das Ende des Mittelalters die übernatürlichen Kräfte, die verborgenen Eigenschaften, die *quinta essentia* und Aehnliches noch eine sehr grosse Rolle spielten; zur Erklärung der Erscheinungen liebte man es auch, besondere geheimnissvolle, den Körpern innewohnende Geister anzunehmen, welche die Gefälligkeit haben mussten, gerade das zu leisten, was zu erklären war.

Nachdem man sich so bis zum Ende des 16. Jahrhunderts in einem Irren mit unbestimmten Begriffen befunden hatte, begann endlich eine genauere und sichere Forschung auf dem Gebiete der Mechanik. Schon Benedetti ahnte das Wesen einer accelerirten Bewegung, indem er das Gesetz der Trägheit ordentlich auffasst, während man vorher annahm, dass zu jeder Aenderung der Lage im Raume die Wirkung

einer Kraft nothwendig sei, wenn wir auch nicht in Abrede stellen wollen, dass erst Galilei die ganze Tragweite desselben ordentlich erkannt und Descartes demselben Worte gegeben hat. Galilei wollte in diesem Principe den aufgestellten Grundsatz, dass die Natur immer die einfachsten und leichtesten Mittel wähle, zur Geltung bringen. Descartes sagt *(Systema cosmicum)*, dass jeder bewegte Körper sich in einer geraden Linie weiter zu bewegen strebt, oder in seinen Principien: Es ist das erste Naturgesetz, dass jeder Körper von selbst in seinem Zustande verharrt und nur sich verändern kann durch äussere Ursachen. So einfach und natürlich uns jetzt die Betrachtung scheint, welche dem Trägheitsgesetz zu Grunde liegt, so schwierig war der Schritt, der gemacht werden musste, um sich auf den neuen Standpunkt zu stellen. So sucht Descartes, der eine von Anfang an vorhandene Kreisbewegung aller Theile des Universums annimmt, durch welche die wichtigsten Naturerscheinungen hervorgebracht werden, das Verbleiben des Körpers in dem ihm innewohnenden Bewegungszustande aus der *immobilitas Dei* abzuleiten und Newton bezeichnete sogar das Vermögen des Verharrens als eine dem Körper innewohnende Kraft *(vis materiae insita)*, welcher er den Namen *vis inertiae* gab, im Gegensatz zu der auf den Körper von aussen einwirkenden Kraft *(vis in corpus impressa)*.

Noch lange ist dieser Satz angezweifelt worden, ja noch Kant führt in seiner Abhandlung von der wahren Schätzung der lebendigen Kraft an, dass die Regel, nach der kein Körper seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung ausser durch äussere Kräfte ändere, mathematisch richtig sei, nicht aber uneingeschränkt von den Körpern der Natur gelte. Erst durch Stevinus ist der dem Archimedes schon bekannt gewesene Begriff des Druckes als einer das Gleichgewicht erzeugenden Kraft wieder aufgenommen worden, während Galilei wohl das Verdienst hat, überhaupt die Messung in die Dynamik eingeführt zu haben, indem er das statische Kräftemaass, den Druck, in sie hinübertrug. Stevinus war es, der nun das Gleichgewicht eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers genau bestimmen konnte nnd von Neuem wieder einen Anstoss zur weitern Ausbildung der theoretischen Mechanik gab *(Elémens de statique* und *Hypomnemata mathematica)*.

Das Nächste, was dann zur Erweiterung des Gebietes der theoretischen Mechanik geleistet wurde, bestand in der Aufstellung der Sätze über die Zusammensetzung der Bewegung oder des Fundamentalprincipes der Statik, welches unter dem Namen Kräfteparallelogramm bekannt ist. Als eigentlichen Erfinder desselben müssen wir Galilei nennen, wenn auch die Alten schon einige Kenntniss davon hatten, indem sie es verwandt haben zur Curvenconstruction, wie Archimedes zur Spirale, Nicomedes zur Conchoide u.s.w.; denn in *II prop. IV* seiner Dialoge zeigt Galilei zuerst, dass ein Körper, wenn er sich mit einer gewissen Horizontal- und Verticalgeschwindigkeit bewegt, sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die durch die Hypotenuse eines Dreiecks repräsentirt wird, deren Katheten diese beiden anderen Geschwindigkeiten vorstellen. Freilich hat Galilei die Wichtigkeit dieses Gesetzes noch nicht vollständig erkannt, denn sonst hätte er nicht das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene *(Théorie d'Equilib. Dial. III)* aus den Hebelgesetzen abgeleitet. Varignon zeigte zuerst, nachdem Descartes, Roberval, Mersenne, Wallis die Theorie der Zusammensetzung der Bewegung behandelt hatten, den Gebrauch dieses Theoremes in seinem *Equilibre des Machines* und noch weiter in seiner *Nouvelle mécanique*, welche nach seinem Tode 1725 erschienen ist; zuvor aber hatte er schon 1685 in *l'histoire de la république des lettres* eine Abhandlung über Rollen gegeben, gegründet auf das Gesetz der Zusammensetzung der Bewegung.

Nachdem nun Galilei durch seine Entdeckungen Bahn gebrochen hatte und dieselben in seinem epochemachenden Werke: *Discorsi e dimostrazionie matematiche intorno a due nuove scienze*, welches zum ersten Male 1638 zu Leyden erschienen ist, bekannt gemacht hatte, wurden schnell grosse Fortschritte gemacht.

Galilei hatte ferner auch einen klaren Begriff von Acceleration und konnte damit eine Untersuchung über die Bahn der Geschosse anstellen, wodurch die aristotelische Erklärung der Wurferscheinung endlich ungültig gemacht wurde. Das Begreifen der Pendelbewegung konnte dem Galilei nicht mehr schwer fallen. Auch hatte der genannte Forscher schon eine bestimmte Idee von der Centrifugalkraft

und spricht in einem seiner Dialoge *(Dialogo sopra le due massimi sistemi del mondo, p. 185, Flore 1710)* klar aus, dass die Rotation der Erde den Körpern eine Geschwindigkeit direct nach oben geben müsste, wenn sie nicht von der Schwerkraft gehalten würden. Er täuscht sich freilich noch, wenn er behauptet, dass die Schwere, wie klein sie auch angenommen würde, hinreichte, um diese Bewegung zu verhindern.

Von Interesse ist hier die Bemerkung, welche der grosse Lagrange über Galilei gemacht hat, indem derselbe sagt: „Die Dynamik ist eine moderne Wissenschaft und Galilei ist deren Begründer. Bei seinen Zeitgenossen machten seine astronomischen Entdeckungen ihn berühmt, aber heute ist die Dynamik der grösste Theil seines Ruhmes. Zu den astronomischen Entdeckungen gehörte nur Fernrohr und Fleiss, aber es gehörte dazu ein ausserordentliches Genie, um die Naturgesetze zu finden bei Phänomenen, welche man immer vor Augen hatte, deren Erklärung aber allen Philosophen entgangen war."

Nicht unwichtig für die Entwickelung der theoretischen Mechanik ist es nun, dass auch in diese Zeit die Erfindung der Infinitesimalrechnung fällt und es ist wohl die Mechanik von Euler 1736 als das erste Werk zu betrachten, in dem die Analysis auf die Untersuchung der Bewegung angewendet wird. Die Bewegung auf drei rechtwinkelige Coordinaten zu beziehen, ist zuerst von Maclaurin *(Traité des fluxions, 1742)* gemacht worden.

Es scheint mir nun die Behauptung richtig zu sein, dass mit dem 17. Jahrhundert die theoretische Mechanik soweit fortgeschritten war, dass ihr noch vor Allem der mathematische Ausdruck fehlte und dass es nun Aufgabe der Mathematiker wurde, die speciellen mechanischen Untersuchungen allgemeinen Gesetzen unterzuordnen, und das ist es, was ich meine, wenn ich sage, es mussten die allgemeinen mechanischen Principien aufgestellt werden. Es kann demnach Princip eine verschiedene Bedeutung haben, einmal bezeichnet es ein allgemeines mechanisches Gesetz, dann auch können die Principien eine allgemeine Betrachtung enthalten, welche zur Integration einer ganzen Gattung mechanischer Differentialgleichungen führen, und endlich können sie auch allgemeine Erfahrungssätze bedeuten.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Betrachtnng der Principien beginnen wir mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten oder der virtuellen Verrückungen und geben zunächst den Ausdruck desselben, wie er in der neueren Mechanik aufgestellt wird. Unter virtueller Geschwindigkeit eines Punktes ist zu verstehen die Gerade, welche derselbe beschreibt, wenn das Pnnktsystem, zu welchem derselbe gehört, in eine Lage gebracht wird, die unendlich wenig von der früheren verschieden, aber mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. Projicirt man diese Länge, welche auch besser die virtuelle Verschiebung genannt wird, auf die Richtung der an diesem Punkte angreifenden Kraft, so heisst diese Projection die virtuelle Geschwindigkeit bezogen auf diese Kraft oder, wenn man die obige Bezeichnung virtuelle Verschiebung beibehält, die virtuelle Geschwindigkeit. Virtuelles Moment einer Kraft ist das Prodnct aus ihrer Intensität in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes bezogen auf die Richtung der Kraft. Es heisst dann das Princip: Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewicht ist und jeder Punkt eine mit den Bedingungen des Systems verträgliche unendlich kleine Verrückung erleidet, so ist die Summe der virtnellen Momente aller Kräfte der Null gleich, wie auch die Verrückung geschehen möge. Welche Momente in Bezug auf die Vorzeichen dabei als entgegengesetzt zu nehmen sind, ist selbstverständlich. Umgekehrt: Sind alle die Momente zusammen gleich Null, so ist das System im Gleichgewicht. Einen kürzeren Ausdruck dieses Princips, auf den wir später zurückkommen werden, erhalten wir noch, wenn wir den Begriff: „Virtuelle Arbeit“ einführen. Bezeichnen wir nämlich damit die Arbeit, welche in Bezug auf die virtuelle Verschiebung geleistet wird, so heisst das Princip kurz:

Wenn die Summe der virtuellen Arbeiten verschwindet, so hat Gleichgewicht statt und umgekehrt. Der hierbei vorkommende Ausdruck virtuell bezieht sich darauf, dass die Verschiebung, Geschwindigkeit, geleistete Arbeit nicht factisch vorhanden ist, sondern nur fingirt wird.

Wenn wir nun die Frage nach dem Entdecker dieses Principes beantworten wollen, so werden wir zurückgewiesen auf die Zeit, in der man überhaupt angefangen hat, die theoretische Mechanik genauer auszubilden.

Es wäre eine Verkennung des Wesens eines Princips, wenn wir behaupten wollten, wie es Fourier zu thun scheint *(École Polyt. V. Mémoire sur la statique)*, dass schon Aristoteles dasselbe gekannt habe, weil er bemerkt hat, dass bei einem Hebel das grössere Gewicht genau im Verhältniss seiner Grösse sich langsamer bewegt als das kleinere.

Nach dem Urtheile des Lagrange *(Mech. 1853, I. p. 18)* müssen wir Guido Ubaldo del Monte (1545—1607) als denjenigen Mathematiker nennen, der zuerst von diesem Principe *(Mechanicorum liber)* Anwendung macht. In dem genannten Buche ist nämlich enthalten die Untersuchung des Gleichgewichtes der Wage, des Hebels, der Rolle und Rollenzüge, des Rades an der Welle, des Keiles und der Schraube, und zwar ist dieselbe mit grosser Genauigkeit und Ausführlichkeit durchgearbeitet.

Obgleich nun Ubaldo am Schluss des citirten Werkes richtig bemerkt, dass, wenn Jemand Maschinen construiren wolle, die aus den erörterten zusammengesetzt sind, so würde es leicht sein, die Grösse der Last und Kraft zu berechnen, welche sich das Gleichgewicht halten, so geht doch aus den Untersuchungen hervor, dass dieser Gelehrte noch nicht die Wichtigkeit und Tragweite des in Rede stehenden Princips gekannt und dasselbe überhaupt noch nicht in seiner Allgemeinheit aufgestellt hat. Es wird von demselben mit Hilfe eines dem zu erörternden gleichen Princips behandelt das Gleichgewicht an der Wage, am Hebel, an der Rolle und den Rollenzügen und an dem Rad an der Welle, während die Gleichgewichtsbedingungen für die schiefe Ebene und für die damit zusammenhängenden Maschinen aus denen für den Hebel abgeleitet werden.

Aehnliches lässt sich über Galilei's Untersuchungen in Bezug auf dieses Princip sagen, obgleich derselbe von mehreren seiner Bewunderer als Entdecker desselben genannt wird. Derselbe sagt, dass dieselbe Kraft erfordert werde, um einen Körper auf eine gewisse Höhe zu bringen als einen n mal so schweren auf den n^{ten} Theil jener Höhe zu erheben und giebt demnach dem Theoreme folgenden Ausdruck: Zwei Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn ihre Momente gleich und entgegengesetzt sind, wobei das Moment ist proportional dem Producte aus Kraft in virtuelle Geschwindigkeit. Galilei betrachtet diesen Satz als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts. (*Della scienza mecanica* und *le scolie de la II propos. III dialogue* in der Ausgabe von Boulogne 1655).

Dieselbe Erklärung von Moment nimmt Wallis in seiner Mechanik von 1669 und leitet daraus ab das Gleichgewicht der hauptsächlichsten Maschinen.

Schon ganz allgemein und als höchst fruchtbar für die Statik wurde das Princip von Johann Bernoulli erkannt, der seine Ansichten darüber 1717 26. Januar dem Pierre Varignon brieflich mittheilte. Dieser hat dann die zu lösenden Aufgaben damit behandelt in *Nouvelle Méeanique, Paris 1725. II. Vol. 4*, wo der erwähnte Brief zu Anfang der 9. Section S. 174 mitgetheilt ist. Es heisst dort: „Wenn irgend welche Kräfte auf irgend welche Art angebracht sind und so, dass sie entweder mittelbar oder unmittelbar wirken, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die Summe der positiven Energien gleich ist der Summe der negativen. Unter Energie ist zu verstehen das Product der Kraft in die Projection der Verschiebung auf die Kraftrichtung und diese ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Projection auf die Verlängerung oder auf die Richtung der Kraft selbst fällt.“ Von Wichtigkeit ist, dass J. Bernoulli den Ausdruck virtuelle Geschwindigkeit *(vitesse virtuelle)* zum ersten Male gebraucht.

Erwähnt muss noch werden, dass auch Cartesius dieses Princip angiebt, aber nur Galilei nachahmt (*Explicatio machinarum atque instrumentorum, quorum ope gravissima quaeque pondera parvis viribus severi possunt [Opusc. posth.]*; denn obgleich derselbe nichts Wesentliches zur Verallgemei-

nerung des Princips beigetragen hat, so wird doch dasselbe oft nach ihm das Cartesianische genannt.

Nach den erwähnten Mathematikern ist das Princip angewendet worden von Maupertuis in den Memoiren der *Academie des Sciences, 1740,* unter dem Namen *Loi de repos* und dann von D'Alembert in seiner *Traité de dynamique, Paris 1748, 4.,* wo derselbe p. 182 dieses Princip ein den Geometern längst bekanntes nennt, aber einen Beweis des Satzes vermisst, den er zu geben versucht, indem er annimmt, dass die Kräfte 1) gleich und entgegengesetzt sind, 2) angebracht sind an den Armen eines Hebels, 3) so beschaffen sind, dass die Resultirende derselben durch einen festen und unüberwindlichen Widerstand geht.

In höchster Eleganz und als Grundlage der theoretischen Mechanik endlich findet sich dieses Princip zuerst dargestellt von Lagrange *(Mécanique analytique, Par., II. Vol. 4, p. 8 etc.).* Der Darstellung dieses Mathematikers sind alle späteren Mathematiker gefolgt und man darf wohl behaupten, dass Lagrange durch Einführung dieses Princips der theoretischen Mechanik nicht nur eine neue, sondern auch zugleich die letzte Gestalt gegeben hat, da es unmöglich scheint, sie noch allgemeiner und einfacher zuglcich zu behandeln. Diese Schätzung des Princips hat Lagrange selbst gehabt; denn er stellte sich seiner abstracten Natur zufolge, welche sich nicht interessirte für einzelne Probleme und sogenannte artige Sätze, sondern den Blick auf das Allgemeine, was aus dem Speciellen durch Abstraction folgt, richtete, die Aufgabe (p. 27), die Mechanik zu reduciren auf eine rein analytische Operation, oder auf p. 69 nach seinen eigenen Worten: „Wir haben uns vorgenommen, aus dem Principe die analytischen Formeln abzuleiten, welche alle Probleme des Gleichgewichts lösen."

Zur weiteren historischen Erörterung über das Princip der virtuellen Geschwindigkeit ist noch Rücksicht zu nehmen auf die versuchten Demonstrationen desselben. Nachdem das Princip, wie schon erwähnt, für besondere Fälle entwickelt und gebraucht, dann von Bernoulli in seiner allgemeinen Bedeutung erkannt und aufgestellt worden war, suchte man dasselbe auch zu beweisen und in Bezug darauf ist vor Allem zu nennen Fourier und Lagrange, deren Beweise im

V. Band des *Journal de l'Ecole Polytechn.* veröffentlicht sind. Der Beweis des ersteren stützt sich auf die Gesetze vom Hebel und Kräfteparallelogramm, während Lagrange diese Gesetze nicht für evident erklärt, sondern das Princip zurückführt auf das vom Flaschenzug, welches von ihm als evident an sich angenommen ist.

Indem ich die weiteren Versuche übergehe, welche man angestellt hat, um den Satz zu beweisen, erwähne ich noch die Ansicht Jacobi's, welche aufgezeichnet ist in den Vorlesungen desselben, herausgegeben von Clebsch, S. 15. Dort nämlich wird gesagt: „Nach der Ansicht vieler Mathematiker, namentlich auch nach der von Gauss, ist der in Rede stehende Satz als ein Princip aufzufassen, von einer mathematischen Deduction desselben also Abstand zu nehmen."

Im Anschluss daran ist zu bemerken, dass von Carl Neumann *(Berichte d. Ges. d. Wissensch., Leipzig 1869, S. 258)* eine Deduction des Princips gegeben ist, sobald nur die zu erfüllenden Bedingungen durch Kräfte zu ersetzen sind, eine Beschränkung, auf die auch Jacobi in seinen Vorlesungen zu Berlin 1847—48 aufmerksam macht.

Nach diesen Erörterungen darf wohl nun behauptet werden, dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus einer allmäligen Verallgemeinerung der Untersuchung über das Gleichgewicht der einfachen Maschinen hervorgegangen ist, also nicht eine bestimmte Aufgabe darauf geführt hat, wenn es nicht diejenige ist, welche aus einem allgemeinen Bedürfniss der gebildeten Menschheit hervorgeht, nämlich die gesonderten Phänomen unter einen allgemeinen Gesichtspunkt zu bringen, d. h. aus dem Bedürfniss nach deductiver Erkenntniss. Die Lösung dieser Aufgabe ist in Bezug auf unseren Gegenstand von Lagrange vollständig gegeben worden.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Als zweites Princip, um der historischen Aufstellung gerecht zu werden, nehme ich den Satz von der lebendigen Kraft oder, was eigentlich hierher gehört, das Princip oder den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Der Ausdruck „lebendige Kraft" ist eingeführt worden von Leibnitz, der denselben zuerst gebraucht und zu begründen versucht hat in den folgenden beiden Abhandlungen: *Demonstratio erroris memorabilis cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum (Act. erud. 1686)* und *Specimen dynamicum pro admirandis naturae legibus circa corporum vires, et mutuas actiones detegendis, et ad suas causas revocandis (Act. erud. 1695).* Es will nämlich Leibnitz unterscheiden die Kraft eines sich bewegenden Körpers von der eines ruhenden, welcher ein Hinderniss drückt. Die letztere Kraft, die also nur einen Antrieb zur Bewegung giebt, ist dann von ihm todte Kraft genannt worden.

Das Maass der Kräfte wurde darauf ein Gegenstand des Streites unter den Mathematikern, so dass dieselben sich beinahe während der Hälfte des 18. Jahrhunderts in zwei Parteien theilten, von denen sich die eine dem Leibnitz anschloss und als Maass der Kräfte nahm das Product aus dem Quadrate der Geschwindigkeit in die Masse, die sogenannte lebendige Kraft, während die andere Partei sich der Definition des Cartesius anschloss und die Kräfte proportional der Geschwindigkeit setzte. Der Streit ist eigentlich ganz unwichtig; denn es handelt sich hier nur um Bezeichnungen, und dass beide Parteien mit je ihrer Definition dieselben richtigen Lösungen der meisten gestellten Probleme geben, dürfte die Unwichtigkeit schon erkennen lassen; und hätte man nur bei den gegebenen Definitionen auf die Wege oder Zeiten Rück-

sicht genommen, so hätte man beide als zusammenfallend gefunden; denn die Descart'sche Behauptung ist richtig unter der Voraussetzung, dass die Kräfte gleiche Zeiten hindurch thätig sind, während die von Leibnitz angewandt werden muss, wenn die Kräfte auf gleiche Wegstrecken gewirkt haben, was von Letzterem auch schon ausdrücklich bemerkt worden ist, indem derselbe sagt, eine Kraft müsse nach ihrer Wirkung und nicht nach der Zeit geschätzt werden, da die Zeit sich nach äusseren Umständen ändert *(Illustratio ulterior etc. Math. Werk. VI. p. 126).*

Der Streit hat so lange gedauert bis D'Alembert in der Vorrede zu seiner Dynamik auseinandersetzte, dass beide Definitionen nur zu einem Wortstreit oder zu einer metaphysischen Untersuchung führen können.

Seitdem unterscheidet man Quantität der Bewegung und lebendige Kraft, so dass das erste ist das Product der Geschwindigkeit in die Masse und das zweite das Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, während man unter bewegender Kraft das versteht, was Newton in den Principien damit bezeichnet, nämlich das Product der Masse in die Beschleunigung, welche die Kraft dem Körper ertheilen würde, wenn er frei wäre, wobei unter Beschleunigung der erste Differentialquotient der Geschwindigkeit in Richtung der Kraft nach der Zeit zu verstehen ist. Diese Bezeichnungen dienen nur, wie D'Alembert besonders hervorhebt, dazu, die Ausdrücke über die Kräfte zu vereinfachen, haben aber nichts mit dem inneren Wesen derselben zu thun.

Der Satz der lebendigen Kraft besteht nun in einer Gleichung, welche für alle dynamischen Probleme Giltigkeit hat, in denen die vorhandenen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht in expliciter Weise enthalten. Diese Gleichung ist folgende, wenn bezeichnet sind mit X, Y, Z die Componenten der bewegenden Kräfte, welche auf das Molekül mit der Masse m wirken, mit v die Geschwindigkeit desselben zur Zeit t und mit v_0 diejenige zur Zeit t_0, und wenn das Zeichen Σ sich erstreckt auf alle Moleküle des Systems

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2 \int_{t_0}^{t} \Sigma (Xx' + Yy' + Zz') dt.$$

Beachtet man dann, dass nach mechanischem Sprachgebrauch $\Sigma(Xx' + Yy' + Zz')\,dt$ die von den Kräften, deren Componenten X, Y, Z sind, in der Zeit dt geleistete Arbeit und also

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma(Xx' + Yy' + Zz')\,dt$$

die in der Zeit von t_0 bis t geleistete Arbeit bedeutet, so würde die Gleichung der lebendigen Kraft sagen, dass die in einer bestimmten Zeit von den angebrachten Kräften geleistete Arbeit gleich ist dem halben Zuwachs an lebendiger Kraft während derselben Zeit. In Bezug auf die rechte Seite der Gleichung ist zu unterscheiden, ob man das Integral angeben kann oder nicht. Ersteres kann nun geschehen einmal wenn man $Xx' + Yy' + Zz'$ als Function von t kennt, d. h. wenn die Bewegungscurve bekannt ist und also x, y, z als Function von t gegeben sind, dann wenn die Grössen X, Y, Z sich ausdrücken lassen als partielle Differentiale einer Function U nach x, y, z, wobei diese Function U die Kräftefunction genannt wird. Es geht unter dieser Voraussetzung obige Gleichung über in die folgende

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = \int \frac{dU}{dt}\,dt = U.$$

In beiden letzten Fällen sagt man, dass das Princip der lebendigen Kraft stattfindet, und nennt die so entstehende Gleichung die des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Dieses Princip ist, wie sich leicht denken lässt, nicht sogleich in dieser Allgemeinheit aufgestellt worden, sondern es ist erst als ein mechanisches Postulat für einen gewissen Fall behauptet worden und zwar von Huyghens, indem derselbe sagt *(Horologium oscillatorium P. IV prop. IV)*, dass, wenn ein zusammengesetztes Pendel einen Theil seiner Schwingung vollendet hat und nach Aufhebung des Zusammenhanges der einzelnen Theile des Pendels die Geschwindigkeiten derselben in die entgegengesetzten verwandelt werden, dieselben dann wieder so hoch steigen, dass dadurch der gemeinsame Schwerpunkt ebenso hoch kommt, als er zu Anfang der Schwingung gewesen ist.

Zur Aufstellung dieses Satzes wurde Huyghens gebracht durch das Problem über den Schwingungsmittelpunkt eines zusammengesetzten Pendels. Die obige Behauptung stützt der Genannte, der, wie er selbst in der Vorrede des citirten Werkes sagt, anfangs durchaus kein Princip finden konnte, das ihm einen Weg zur Lösung des gestellten Problems bahnte, und deshalb an der Schwelle zu diesem Geheimnisse zurückgeschreckt wurde, auf folgende von ihm als Axiome zugelassene Sätze. Der Schwerpunkt eines Systems schwerer Körper kann nicht höher steigen als er gefallen ist, welche Veränderungen der einzelnen Körper in ihrer gegenseitigen Lage auch vorgenommen werden mögen *(Pars IV. Hyp. I)*, und ein zusammengesetztes Pendel steigt immer eben so hoch als es gefallen ist *(Hyp. II)*. Mit Hilfe dieser Voraussetzungen wird die seinem Princip entgegengesetzte Annahme ad absurdum geführt.

Es mag zugleich bemerkt werden, dass hierin die Idee liegt, dass bei allen mechanischen Wirkungen der Schwerpunkt des Körpers als der Repräsentant des ganzen Körpers betrachtet werden kann.

Dass nun wirklich der oben angegebene Satz von Huyghens eine specielle Anwendung des allgemeinen über die lebendige Kraft ist, lässt sich folgendermassen erläutern. Nach einer allgemeinen Eigenschaft des Schwerpunktes eines Körpersystems lässt sich dessen Weg ausdrücken durch die Summe der Producte der Masse jedes Körpers in den Weg, welchen er in derselben Richtung durchlaufen hat, getheilt durch die Summe der Massen. Nach den Entdeckungen Galilei's über die Wirkung der Schwere ist der Verticalweg eines schweren Körpers proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche er beim freien Fall erlangt und mit der er auf dieselbe Höhe zurücksteigen wird. Es reducirt sich demnach der Huyghens'sche Satz darauf, dass bei der Bewegung schwerer Körper die Summe der Producte der Massen in das Quadrat der Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke dasselbe ist, wenn die Körper irgend wie verbunden oder frei dieselbe Höhe durchlaufen. So hat Huyghens sein Theorem auch bezeichnet in einer kleinen Schrift über die Methoden von Johann Bernoulli und l'Hopital zur Lösung des Problems vom Schwingungsmittelpunkte.

Die Geschichte des hier citirten Problems ist folgende. P. Mersenne stellte 1646 die Aufgabe, die Schwingungsdauer eines schweren Körpers, der um eine horizontale Axe oscillirt, zu bestimmen, d. h. zu finden den Schwingungsmittelpunkt. Alle Geometer, welche dies Problem behandelt haben, Descartes *(Lettres de Descartes)*, Roberval (ebendaselbst), Wallis *(Mechanica sive de motu)*, Fabri *(Tract. de motu, Append. physico-math. de centro percussionis)* und Mersenne selbst *(Mersenii Reflexiones physico-math., Cap. XI u. XII)* setzten stillschweigend voraus, dass der Schwingungsmittelpunkt zusammenfällt mit dem Mittelpunkte des Stosses, d. h. desjenigen Punktes, den Wallis zuerst *(Cap. XI Prop. XV)* in die Mechanik eingeführt hat *(punctum percussionis maximae* oder *centrum percussionis)* und der so bestimmt ist, dass durch ihn auf einen sich um eine Axe drehenden Körper die Richtung des Stosses ausgeübt werden muss, damit der Körper, wenn er an ein unbewegliches Hinderniss anstösst, in seiner Bewegung vollständig gehemmt werde, ohne dass dabei die Drehaxe einen Druck erleide. Die Untersuchung des Schwingungsmittelpunktes erstreckte sich zunächst nur auf ebene Körper, bis Huyghens in dem citirten Werke das Problem vollständig löste.

Einige Jahre nach der Publication des *Horologium oscillatorium* machte der Abt Catelan *(Journal des savants 1682* und *84)* darauf aufmerksam, dass die Sätze von Huyghens nicht als Grundsätze angenommen werden dürfen, worauf das Problem von Neuem untersucht worden ist von l'Hopital, Johann Bernoulli und Anderen.

Die Principien, welche Catelan, ein eifriger Cartesianer, als richtig denen des Huyghens gegenüber aufstellte, waren unter Anderen folgende. In jedem zusammengesetzten Pendel ist die Totalgeschwindigkeit desselben gleich der Summe derjenigen Geschwindigkeiten, welche die Gewichte haben würden, wenn jedes für sich ein Pendel gebildet hätte, ferner dass die Schwingungszeit das arithmetische Mittel aus den Schwingungszeiten ist, welche jedes Gewicht haben würde, wenn es für sich allein ein Pendel gebildet hätte.

Die Unrichtigkeit dieser Principien zeigte Huyghens seinem Gegner, indem er ihm nachwies, dass dann der Schwerpunkt des zusammengesetzten Pendels höher steigen würde

durch den Zusammenhang des Körpers, als wenn die Moleküle frei wären. Von Wichtigkeit in Bezug darauf ist die unter dem D'Alembert'schen Princip noch einmal citirte Abhandlung in *Acta erud. 1686: Narratio controversiae inter Dr. Hugenium et Abbatem Catelanum agitatae de centro oscillationis.*

Johann Bernoulli ist dann eigentlich derjenige, welcher dem in Rede stehenden Principe volle mechanische Geltung verschaffte, indem er die von Leibnitz eingeführte Unterscheidung von todter und lebendiger Kraft benutzte und das folgende allgemeine Gesetz aufstellte. Die Summe der lebendigen Kräfte mehrerer Körper, welche auf einander durch einfachen Druck wirken, ist immer dieselbe und zwar gleich der lebendigen Kraft, welche von den Kräften herrührt, welche die Körper bewegen. Johann Bernoulli's Lösung des gedachten Problems ist enthalten in zwei Abhandlungen der *Mem. de l'Académie de Paris 1703 u. 1704. Démonstration générale du centre de balancement ou d'oscillation tirée de la nature du levier* und *Démonstration de Principe de M. Hugens, touchant le centre de balancement et de l'identité de ce centre avec celui de percussion.* Auch giebt Johann Bernoulli dem Principe den Namen von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Nun wurde unser Princip schroff entgegengesetzt dem der Cartesianer, welche behaupteten, dass in der Körperwelt beständig einerlei Summe der Bewegung erhalten wird, indem statt Bewegung lebendige Kraft eingeführt wurde. Dies konnte die Anhänger Johann Bernoulli's sogar soweit bringen, die Existenz nicht elastischer Körper zu leugnen, um die Erfahrungen beim Stoss nicht gegen ihre Lehre zeugen zu lassen, während Bernoulli selbst richtig sagte, dass beim Stoss weicher Körper ein Theil der lebendigen Kraft auf die Zusammendrückung verwendet werde, so aber in den zusammengedrückten Theilen verbleibe und nur nicht wieder thätig werde, weil die Weichheit des Körpers es verhindere *(de vera notione virium vivarum § 9 Opera T. III, p. 239).*

Aus dem Obigen ist schon klar, dass zur weiteren Ausbildung dieses Principes die Untersuchung des Stosses von Einfluss gewesen sein muss.

Daniel Bernoulli *(Mém. de l'Académie des Sciences de Berlin 1748, p. 356)* wandte die Ideen seines Vaters für den Fall an, wo Körper sich gegenseitig anziehen mit einer Intensität, welche eine Function der Entfernung ist, und leitete auch daraus ab die Gesetze der Bewegung von Flüssigkeiten in Gefässen.

Allgemein bewiesen ist das Princip aber erst durch D'Alembert *(Traité de dynamique, p. II, chap. IV)* mit Hilfe des von ihm aufgestellten Principes. Auch ist von diesem erst fest bestimmt worden, in welchen Fällen das Princip angewendet werden kann. Wir finden dasselbe bei D'Alembert in folgender Form: Wenn Körper auf einander wirken, indem sie sich durch Fäden oder unbiegsame Stäbe ziehen oder sich stossen unter der Bedingung vollkommener Elasticität, so ist die Summe der Producte der Quadrate der Geschwindigkeiten in die Masse eine constante Grösse, und wenn die Körper durch irgend welche Kräfte angegriffen sind, so ist die Summe der Producte der Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke gleich der Summe der Producte der Massen in die Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten, vermehrt um das Quadrat der Geschwindigkeiten, welche die Körper erlangt haben würden, wenn sie durch dieselben Kräfte angegriffen worden wären und sich frei bewegt hätten jeder auf der Linie, welche er beschrieben hat.

Zu erwähnen ist in Bezug auf unser Princip noch ein Problem, welches Montigny *(Mém. de l'Acad. 1741)* gestellt hat. Sei gegeben in einer Horizontalebene ein unbiegsamer Stab, beschwert durch zwei oder mehrere Gewichte, die sich frei auf dem Stabe bewegen können. Der Stab selbst geht in einem Ring in der Horizontalebene und kann in diesem ohne Widerstand gleiten, während der Ring sich frei drehen kann. Es wird nun verlangt für jeden Körper, wenn der Stab einen Anstoss erhalten hat, zu bestimmen die Curve, welche er beschreibt, und die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht. Dieses Problem hat Montigny selbst mit Hilfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft gelöst. Es gehört dieses Problem auch zu denen, welche D'Alembert mit seinem Principe behandelt hat.

Eine neue Fassung hat unser Princip erhalten durch die sogenannte Kräftefunction, welche zuerst eingeführt worden

ist durch Hamilton, während Daniel Bernoulli zuerst in der oben schon erwähnten Abhandlung darauf hindeutet.

Der Name unseres Principes wird erklärt, wenn man dem Satze folgende geometrische Deutung giebt: Wenn die Bewegung eines Körpersystems von der Art ist, dass es in dieselbe Lage zurückkehren kann, so ist bei der Rückkehr auch die lebendige Kraft dieselbe, wobei vorausgesetzt wird, dass für diesen Fall das Princip der lebendigen Kraft überhaupt gilt.

In neuester Zeit hat nun das Princip eine noch grössere Wichtigkeit erhalten durch Helmholtz (Ueber die Erhaltung der Kraft, 1847), indem derselbe darauf hinweist, dass alle Kräfte als Centralkräfte gedacht werden müssen. Derselbe sagt: „Wenn sich eine beliebige Anzahl von beweglichen Massenpunkten nur unter dem Einfluss solcher Kräfte bewegt, welche sie selbst gegeneinander ausüben oder welche gegen feste Centren gerichtet sind, so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammengenommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte dieselbe relative Lage gegen einander und gegen die etwa vorhandenen festen Centren einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen."

Das Princip lässt sich endlich noch von einer anderen Seite betrachten, nämlich vom technischen Standpunkte aus. Die Nützlichkeit desselben zur Berechnung des Effectes der Maschinen ist zuerst erörtert von Parent *(Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris 1704)*, dann dürfte noch zu nennen sein Lagrange *(Theor. des Fonct. analyt. III c. 7)* und endlich Coriolis *(Traité du calcul et de l'effet des machines)*.

Durch das Obige geht nun deutlich hervor, dass die Erfindung des Princips dem Huyghens zugeschrieben werden muss und dass man darauf gekommen ist durch das Problem des Schwingungsmittelpunktes, dass aber dessen weitere Bearbeitung und Verallgemeinerung bis in die neueste Zeit hineinragt.

Princip der Erhaltung des Schwerpunktes.

Der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes lautet: Die Bewegung des Schwerpunktes eines freien Systems erfolgt so, als ob alle Massen der verschiedenen Punkte im Schwerpunkte vereinigt und sowohl die momentanen als die stetig wirkenden Kräfte sich selbst parallel an ihm angebracht wären. Das Wort Erhaltung bezieht sich darauf, dass man die Bewegung durch dieselben Gleichungen dargestellt erhalten wird als wenn keine Bedingungsgleichungen da wären. Ist die Summe der Componenten der äusseren Kräfte gleich Null, so bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig in einer Geraden und man sagt dann das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes findet statt. Der Satz gilt auch von nicht freien Systemen, wenn man die Verbindungen durch Kräfte ersetzen kann, welche dieselben hervorbringen.

Die erste Aufstellung dieses Satzes ist auch auf Huyghens zurückzuführen. Derselbe behauptet bei den Untersuchungen über den Stoss gegenüber dem Descartes, welcher sagt, dass die Quantität der Bewegung vor und nach dem Stosse dieselbe bleibt, dass die Uebereinstimmung, mit der die Natur überall handelt, darin besteht, dass nicht allein beim Stoss, sondern überall der Schwerpunkt entweder unbeweglich ist oder sich vor nnd nach dem Stoss mit derselben Geschwindigkeit bewegt.

Diese erste Aufstellung entbehrt aber noch einer genauen Deduction und man kann daher auch der Ansicht von Lagrange p. 227 beitreten, nach der Newton als Entdecker zu nennen ist; es heisst nämlich zu Anfang der Principien *(Axiomata sive leges motus. cor. 4): Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis*

actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitationis vel quiescit vel movetur uniformiter in directam.

Zu erwähnen bleibt hier nur noch, dass D'Alembert in *Traité de dynamique, p. II, chap. 2,* mit Hilfe des neuen von ihm aufgestellten Satzes dem Princip der Erhaltung des Schwerpunktes eine allgemeine Fassung giebt und genau untersucht, für welche Kräfte es angewendet werden kann. Er sagt nämlich, dass, wenn die wirkenden Kräfte constant und gleichgerichtet sind, dann wenn sie nach einem Punkt hinwirken und zwar in einem Verhältniss ihres Abstandes, der Schwerpunkt dieselbe Curve beschreiben muss als wenn die Körper frei wären. Diesem fügt Lagrange *(Méc. anal. II. sect. 3, § 1)* hinzu, dass das Princip auch gilt für beliebige Kräfte von ganz verschiedenen Richtungen.

Princip der Erhaltung der Flächen.

Das Princip der Erhaltung der Momente der Rotation oder das Princip der Flächen besteht in Folgendem. Zeichnet man von einem festen Punkte aus nach den verschiedenen Punkten, welche zu einem Körpersystem gehören, dessen Zusammenhang sich reducirt auf Beziehungen zwischen den gegenseitigen Abständen und bildet man die Producte aus den Massen in die Projection der vom Radiusvector beschriebenen Fläche auf irgend eine feste Ebene, indem man von einem bestimmten Zeitpunkte, der für alle Punkte derselbe ist, ausgeht, so ist die Summe dieser Producte, wenn die Momente der bewegenden Kräfte um die Gerade, deren Projection der feste Punkt ist, gleich Null sind, der Zeit proportional, und umgekehrt ist bei Geltung dieser Proportionalität auf das Vorhandensein solcher Kräfte, wie sie oben charakterisirt sind, zu schliessen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die in directer Bewegung beschriebenen Flächen dem Zeichen nach entgegengesetzt zu nehmen sind den in rückgängiger Bewegung beschriebenen. Dem Principe kann man noch eine andere mechanische Form geben. Wenn die von aussen wirkenden Kräfte verschwinden, oder wenn die Punkte Wirkungen unterworfen sind, welche an dem System im Gleichgewicht sein würden, wenn es starr gemacht wäre, oder endlich wenn alle an die verschiedenen Punkte des Systems angebrachten Kräfte durch ein und denselben Punkt gehen, so ist die Summe der Momente der Quantitäten der Bewegung, welche in jedem Augenblicke auf das System wirken, auf drei rechtwinklige Achsen bezogen, constant und umgekehrt.

Dieses Princip scheint zu gleicher Zeit aufgefunden zu sein von Euler, Daniel Bernoulli und d'Arcy, aber in verschiedener Form, jedenfalls aber ist es eine Verallgemei-

nerung des Theoremes von Newton *(Principia lib. I. prop. I)* über die Flächen, welche bei Centralkräften beschrieben werden.

Nach Euler und Bernoulli gilt das allgemeine Princip nur bei der Bewegung mehrerer Körper um ein festes Centrum und es geben die genannten Mathematiker dem Princip folgende Form: Die Summe der Producte der Masse jedes Körpers mal der Drehgeschwindigkeit um das feste Centrum und dem Abstande von diesem ist unabhängig von der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander und es bleibt dasselbe so lange nicht wirkt eine Kraft oder ein Widerstand von Aussen oder, wenn keine äusseren Kräfte existiren, ist die Summe der Momente der Bewegungsquantitäten in Rücksicht auf feste Achsen constant.

D. Bernoulli hat dieses Princip aufgestellt im ersten Bande der *Mém. de l'Acad. de Berlin 1745* und Euler in demselben Jahre *Opera I,* und zwar sind beide durch Lösung desselben Problemes darauf geführt worden. Es galt nämlich die Untersuchung der Bewegung mehrerer Körper in einer Röhre von gegebener Form, die sich nur bewegen kann um einen Punkt oder um ein festes Centrum.

Das Princip wird von d'Arcy *(Mém. de l'Acad. des Sciences,* 1752 erschienen) in folgender Form gegeben. Die Summe der Producte der Masse jedes Körpers in die Projection der Fläche, welche sein Radiusvector um den festen Punkt beschreibt, auf eine Ebene ist der Zeit proportional. Dass der Satz in dieser Form nichts anderes als der obige ist, ergiebt sich leicht, wenn man bedenkt, dass die Circulationsgeschwindigkeit ausgedrückt wird durch das Element des Bogens getheilt durch das Element der Zeit, und dass das erste dieser Elemente multiplicirt mit dem Abstande vom Mittelpunkte giebt das Element der Fläche.

Erwähnenswerth ist noch eine zweite Form, welche d'Arcy seinem Satze giebt, eine Form, welche es mit dem Vorigen noch mehr in Uebereinstimmung bringt. Es heisst darnach das Princip: Die Summe der Producte der Massen in die Geschwindigkeiten und den Abständen von dem Mittelpunkte auf die Richtungen der Körper ist constant. In dieser Form gab es dem Aufsteller die Lösung eines Problems, welches die Mathematiker der dermaligen Zeit

eifrig beschäftigte. Man suchte nämlich ein Gesetz, dem alle anderen unterworfen sein müssten. Es nennt in Bezug darauf d'Arcy sein Princip das von der Erhaltung der Wirkung *(conservation de l'action)* im Gegensatz zu dem nächsten Principe, welches dasselbe Problem lösen sollte.

Wie schon bei den früheren Principien, so auch hier müssen wir noch des grossen Forschers Lagrange gedenken, da derselbe das Gesetz allgemein giebt *I. Sect. p. 229* und dessen Anwendung kurz bezeichnet, indem er sagt, dass die Summe der Producte der Massen in die Fläche, projicirt auf eine Ebene, der Zeit proportional ist, sodass, wenn diese Flächen auf drei einander senkrechte Ebenen projicirt werden, drei Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen der Zeit und den Coordinaten der von den Körpern beschriebenen Curven resultiren.

Princip der kleinsten Wirkung.

Das Princip der kleinsten Wirkung *(le princip de la moindre action)* besteht im Folgenden. Sind zwei Positionen eines Systemes von Körpern gegeben (d. h. kennt man die Werthe, welche für $x = a$ und $x = b$ die jedesmal übrigen $3n - 1$ Coordinaten enthalten) und wird das Integral

$$\int \sqrt{2(U+h)}\ \sqrt{\Sigma m\, ds^2}$$

auf die ganze Bahn des Systems von der ersten Position zur zweiten ausgedehnt, so ist der Werth desselben für die wirkliche Bahn ein Minimum in Bezug auf alle möglichen Wege, d. h. solche, welche mit den vorhandenen Bedingungen des Systems vereinbar sind. Es ist dies das Princip, welches Jacobi (Vorlesungen über Dynamik) in folgenden Satz zusammenfasst: Die Natur erreicht ihre Wirkung mit dem kleinsten Kraftaufwande.

Maupertuis hat zuerst dieses Princip aufgestellt und zwar wie folgt: Wenn mehrere gegenseitig aufeinander wirkende Körper eine Veränderung in ihrer Bewegung erfahren, so ist dieselbe immer so, dass die Grösse der Wirkung, welche die Natur anwendet, um sie hervorzubringen, die kleinstmögliche ist, und diese Wirkung hat zum Maass das Product der Masse in Weg und Geschwindigkeit. Dieses Gesetz ist von Maupertuis gebraucht worden, um die Erscheinung der Zurückwerfung und Brechung des Lichtes zu erklären *(Mém. des Sciences de Paris 1744* und allgemeiner in einer Abhandlung der *Acad. des Sciences de Berlin 1746)*. In dem letzten Artikel wird dieses Princip über alle anderen so hoch gestellt, dass ihm die Gesetze des Gleichgewichts, der gleichförmigen Bewegung des Schwerpunktes beim Stoss, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft als Unterabtheilungen untergeordnet sind.

Der Ausdruck dieses Gesetzes, der von Maupertuis gegeben ist, deutet schon auf den Grund seiner Entdeckung hin, der also zu suchen ist in dem Wunsche, einen Satz zu finden, welcher den letzten Grund *(cause finale)* aller mechanischen Erscheinungen enthalten soll, aus dem also alle Naturgesetze folgen müssen. Dieser Gedanke gehört nun allerdings dem Alterthum; denn schon Hero suchte diesen letzten Grund und fand ihn darin, dass die Natur Alles auf dem kürzesten Wege zu erreichen suche. Diesem letzten Gesetze widersprechen aber in vielen Fällen die Erscheinungen der Reflexion, in allen die Brechungsphänomene. Fermat substituirt deswegen dafür folgende Behauptung: Das Licht legt seinen Weg bei der Brechung so zurück, dass es die geringste Zeit dazu verbraucht, während Leibnitz annimmt, dass das Licht den leichtesten Weg gehe. Letztere beiden kommen nun allerdings unter ihren Voraussetzungen zum richtigen Brechungsgesetz, aber nur unter der Bedingung, dass sich das Licht im dichtern Mittel langsamer als im dünnern bewegt, also unter einer der damaligen Erkenntniss von der Lichtbewegung widersprechenden Ansicht. Diesen Hypothesen gegenüber giebt dann Maupertuis sein Princip, welches das gegebene Problem nach Wunsch löste.

Zur vollen Entscheidung über die Priorität der Erfindung des Princips ist es noch nöthig, einen Streit zu erwähnen, der deswegen von König *(Acta erudit. 1751)* begonnen worden ist. Letzterer nämlich versuchte erstens die Unrichtigkeit des Principes nachzuweisen, dann unter Bezugnahme auf einen Brief, den Leibnitz an Hermann 1707 geschrieben haben soll, festzustellen, dass Leibnitz den Satz über die kleinste Wirkung schon angegeben habe. In dem erwähnten Briefe soll Folgendes gestanden haben: „Die Wirkung einer Kraft ist proportional dem Producte der Masse in den Weg und die Geschwindigkeit oder dem Producte aus der Zeit in die lebendige Kraft. Ich habe bemerkt, dass bei Veränderung der Bewegung diese zu einem Minimum oder Maximum wird.“ Es ist nun nicht entschieden worden, da trotz vielseitiger Nachforschung der besagte Brief nicht hat gefunden werden können, ob derselbe wirklich existirt hat, ob also wirklich Leibnitz diesen Ausspruch gethan hat, wenn auch das Gegentheil sehr wahrscheinlich gemacht worden ist. Un-

ter anderen hat sich Euler in zwei grösseren Abhandlungen *(Mém. de Berlin, 1751, 1753)* bemüht, nachzuweisen, dass der Brief nicht existirt habe und also dem Maupertuis das Verdienst bleibt, das Princip aufgestellt zu haben, aus dem man die ganze Mechanik ableiten könne.

In den verschiedenen Angriffen gegen Maupertuis führt man auch andere Gelehrte an, welche schon eine Kenntniss dieses Principes gehabt hätten, verwechselt aber dasselbe mit dem Gedanken, der dazu geführt hat, nämlich damit, dass überhaupt ein allgemeines Naturgesetz vorhanden sein müsse. So wird erwähnt Malebranche, der behauptet *Dieu agit toujours dans l'ordre et par les voies les plus simples,* ohne aber anzugeben, worin diese einfachsten Mittel bestehen. Aehnliches gilt von dem, was über Wolf, s'Gravesande, Engelhardt gesagt ist, während diese auch nur sprechen von einem Maasse der Wirkung.

Wenn nun im Folgenden noch über die weitere Bearbeitung des Principes zu sprechen ist, so muss vor Allem Euler genannt werden, der von dem Satze die erste Idee gegeben hat am Ende seines *Traité des Isopérimètres* (Lausanne 1744), indem er daselbst nachweist, dass bei den Linien, welche Körper in Folge von Centralkräften beschreiben, das Integral der Geschwindigkeit mal dem Curvenelement immer ein Maximum oder ein Minimum ist. Dem grossen Mathematiker ist es aber nicht gelungen, das Princip anzuwenden für gegenseitige Anziehungen, er begnügt sich daher zu sagen, dass dafür die Rechnungen sehr weitläufig würden, indess müsste das Princip auch hier gelten; denn die Grundsätze einer gesunden Metaphysik zeigten, dass in der Natur die Kräfte nothwendig immer die kleinste Wirkung hervorbringen müssten (wie er meinte wegen der den Körpern innewohnenden Trägheit).

Euler hat sich zu diesem Ausspruch, wie Jacobi meint p. 43, verleiten lassen durch Missverständniss des Namens kleinste Wirkung.

Die erwähnte Eigenschaft der Bewegung, welche also Euler nur der isolirter Körper ertheilt hat, ist von Lagrange erweitert worden mit Hilfe des Principes der lebendigen Kräfte auf die Bewegung eines ganzen Systems von Körpern, die gegenseitig auf einander wirken. Es hebt aber

derselbe besonders hervor, dass er dem Principe den unpassenden Namen von der kleinsten Wirkung gebe und es nicht ansehe als ein metaphysisches Princip, sondern als ein allgemeines Resultat der Gesetze der Mechanik. Ueberdies giebt Lagrange dem Principe *(I. p. 281)* einen anderen Ausdruck, indem er statt ds setzt vdt und erhält also

$$\int dt \, \Sigma m v^2.$$

Dadurch reducirt sich dasselbe darauf, dass die Summe der lebendigen Kräfte aller Körper von dem Ausgangspunkt der Bewegung bis zu einem bestimmten Punkt der Bahn ein Min. oder Max. ist und es erhält dann nach Lagrange das Princip den Namen *principe de la plus grande ou plus petite force vive*, oder das Princip der Sparsamkeit. Lagrange meint dann, dass dadurch das Princip Anwendung findet auch auf das Gleichgewicht.

Ueber Letzteres spricht sich Gauss *(V p. 26)* folgendermassen aus: „Lagrange sieht es als einen Vorzug des Princips der kleinsten Wirkung an, dass es das Gleichgewicht und die Bewegung zugleich umfasse, eine Bemerkung, die doch mehr witzig als wahr zu sein scheint, da das Min. in beiden Fällen in ganz verschiedener Beziehung stattfindet."

Zur genaueren Kenntniss des Princips ist noch zu bedenken das, was Jacobi *p. 145* über dasselbe sagt. Derselbe hat nämlich nachgewiesen, dass zu dem Satze noch eine Beschränkung gehört; denn es gilt dasselbe nicht zwischen zwei beliebigen Endpositionen des Systems, sondern nur wenn End- und Anfangsposition hinlänglich nahe sind, und es werden dann auch die Grenzen von Jacobi genauer charakterisirt.

Zum Schluss möchte ich noch einmal erwähnen, dass zur Entdeckung dieses Princips, wenn man von der speciellen Anwendung auf die Lichterscheinungen absehen will, nach den Erörterungen von Maupertuis selbst der ideale Gedanke geführt hat, dass man nur eine richtige Idee von der Macht und Weisheit eines höchsten Wesens erhalten könne, wenn man den letzten Grund aufsuche.

D'Alembert's Princip.

Eines der wichtigsten Principien der Dynamik ist das D'Alembert'sche oder das der verlorenen Kräfte, welches man in folgender Form geben kann: Wenn ein materielles Punktsystem infolge irgend welcher Kräfte in Bewegung ist, so würden diejenigen Kräfte, welche im Stande wären, die beobachtete Bewegung hervorzubringen, wenn das System frei wäre, im Gleichgewicht sein infolge der Verbindung des Systems den wirklich angebrachten Kräften in entgegengesetzter Richtung oder kürzer, wenn ein materielles Punktsystem durch irgend welche Kräfte in Bewegung gesetzt ist, so sind die verlorenen Kräfte infolge der Verbindung im Gleichgewichte. Verlorene Kräfte sind dann diejenigen, welche wegen des Zusammenhanges sich gegenseitig aufheben, also die Kräfte, welche resultiren aus denjenigen, welche an den Punkten des Systems wirken und denen, welche den Kräften entgegengesetzt sind, die den Punkten, wenn man sie frei denkt, die Bewegung ertheilen würden, welche sie wirklich haben.

Obgleich nun der Name des Princips auf D'Alembert hinweist, so scheint doch Fontaine dasselbe bereits vor ihm erkannt zu haben: denn in dem *Table des mémoires de Fontaine*, welcher seiner *Traité du calcul differentiel et intégral (p. 3)* vorausgeht, finden wir, dass er dieses Princip der Academie 1739 mitgetheilt hat. Es heisst dort: *Dans le conflict de plusieurs corps, quelle qu'en soit la cause, les changements qui arriveront aux états de ces corps dans l'espace seront tels, que les forces qu'ils avaient pour s'y refuser se seront vaincus mutuellement, en auront été en équilibre.*

Das Princip ist vorbereitet worden von Newton; denn derselbe giebt in seinen Principien zu *Lex III: Actio est par reactioni* eine Bemerkung, die sich nach Thomson (Theo-

retische Physik § 264) in folgende Worte bringen lässt: „Alle Kräfte des Systems bilden in Verbindung mit den Gegenwirkungen seiner materiellen Punkte gegen eine Beschleunigung für jeden einzelnen Punkt ein System, das sich im Gleichgewicht befindet. Folglich bilden nach dem Princip der Vereinigung von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten, die sämmtlichen an Punkten des Systems wirkenden Kräfte im Verein mit den Gegenwirkungen gegen eine Beschleunigung eine für das ganze System im Gleichgewicht befindliche Reihe von Kräften."

Noch könnte man erwähnen, dass Johann Bernoulli, Hermann und deren Nachfolger dieses Princip schon angewandt haben bei der Behandlung des Schwingungsmittelpunktes. Ersterer giebt wenigstens *(Acta erudit. 1686 p. 356. Narratio controversiae etc.)* den letzten Grund des D'Alembert'schen Princips an, indem er behauptet, dass ein jedes Problem der Dynamik sich zurückführen lassen muss auf eines der Statik, wenn er auch bei seiner Entwickelung einen Fehler begeht, indem er nicht die verlorenen Kräfte an dem betreffenden Hebelarm wirken lässt, sondern nur die Geschwindigkeiten statt deren Elemente.

Nichts desto weniger gebührt aber doch dem D'Alembert das grosse Verdienst, dem Principe eine klare mathematische Form gegeben und auch die Anwendbarkeit desselben durch viele Beispiele gezeigt zu haben. Die ausführliche Darstellung und Anwendung des Principes giebt D'Alembert in seinem *Traité de dynamique 1743 II p. 49*, während er es zum ersten Male formulirt hat in einer Abhandlung der Academie der Wissenschaften, präsentirt gegen Ende des Jahres 1742.

Das Problem, welches sich D'Alembert giebt und als dessen Lösung er das nach ihm genannte Princip aufstellt, ist folgendes: „Sei gegeben ein System von Körpern, die gegenseitig irgendwie aufeinander wirken, und werde jedem derselben eine besondere Bewegung ertheilt, der er nicht folgen kann wegen der Wirkung der anderen Körper, so soll die Bewegung jedes einzelnen gesucht werden." Um die gegebene Aufgabe zu behandeln, schliesst D'Alembert, zerlegt man die jedem einzelnen Körper mitgetheilte Bewegung $a, b, c \ldots$ in zwei andere $A, \alpha, B, \beta, C, \gamma \ldots$, sodass, wenn nur die

eine $A, B, C \ldots$ beibehalten wird, die Körper sich bewegen würden, als ob sie frei wären, und wenn nur die anderen $\alpha, \beta \ldots$ beibehalten würden, die Körper infolge der Verbindung unter einander in Ruhe blieben, so ist klar, dass die Körper wirklich die erstere Bewegung $a, b, c \ldots$ annehmen wegen ihrer gegenseitigen Wirkung, es müssen also die $\alpha, \beta \ldots$ sich das Gleichgewicht halten.

Dieses Princip ist dann zunächst gebraucht worden, um Eigenschaften des gemeinschaftlichen Schwerpunktes zu finden, wovon oben bei dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes Erwähnung geschehen ist. Die weitere Anwendung desselben bezieht sich auf Probleme, die enthalten sind unter folgenden Ueberschriften. *§ 1 p. 96:* Körper, welche sich durch Fäden oder Stäbe ziehen. *§ 2 p. 122:* Körper, welche auf einer Ebene schwanken. *§ 3 p. 129:* Körper, welche auf einander durch Fäden wirken, auf deren Längen sie sich frei bewegen können. *§ 4 p. 138:* Körper, welche sich stossen.

Eines der schönsten Resultate, welches D'Alembert mit Hülfe seines Principes geliefert hat, ist die vollständige Lösung des Problemes der Verrückung der Aequinoctien, einer Aufgabe, welche bis dahin den vereinten Kräften einer grossen Anzahl von Geometern und selbst dem Scharfsinn eines Newton widerstanden hat *(Recherches sur la précession des équinoxes 1749 p. 35 Serie IV).* Der Wunsch, diese Erscheinung durch Rechnung aufzuklären, ist überhaupt vielleicht eine Veranlassung gewesen zu einer genauen Erörterung der Bewegungsgleichungen und hat vielleicht D'Alembert bewogen, ein allgemeines Princip aufzusuchen, dem alle mechanischen Probleme unterworfen sind.

Es galt damals noch durch Uebereinstimmung der Beobachtungen mit den durch Rechnung gestützt auf das Newton'sche Gravitationsgesetz erhaltenen Resultaten die vorhandenen Zweifel gegen dieses Gesetz zu beseitigen. Zur Bestätigung der Behauptung, dass das Gravitationsgesetz keineswegs sofort nach seiner Entdeckung auch allgemein gültig angenommen worden ist, erinnere ich nur an einen Ausspruch, der sich findet in den Briefen von Huyghens, eines Mannes, der auf der Höhe seiner Zeit stand, selbst grossartige Entdeckungen gemacht hat und die Gedanken

und Entdeckungen Anderer wohl zu würdigen im Stande war. Es heisst dort: „Der Newton'sche Gedanke einer gegenseitigen Anziehung scheint mir absurd. Ich wundere mich nur, dass ein Mann wie Newton so viele mühsame Untersuchungen und Rechnungen anstellen konnte, welche kein besseres Fundament haben als einen solchen Gedanken."

D'Alembert selbst sagt in der Einleitung des citirten Werkes *p. 28:* „Die Nutation der Erdaxe, bestätigt durch die Beobachtung und die Theorie, enthält den vollständigen Beweis der Gravitation der Erde gegen den Mond und damit die Anziehung der Planeten auf ihre Satelliten. Bis jetzt schien diese Anziehung nur durch die Ebbe und Fluth manifestirt, dies ist aber ein Phänomen zu complicirt und zu empfindlich gegen einen strengen Calcul, um die Gegner der Gravitation zum Schweigen zu bringen. Die Nutation ist eine einfache Wirkung, so dass ich nicht weiss, was sie dagegen einzuwenden haben. Meine Erörterungen über die Newton'sche Theorie werden zum Beweis dienen, dass dieses geistreiche System bis jetzt keinen Angriffspunkt hat."

D'Alembert giebt ferner in der Einleitung zur Dynamik noch einen Zweck seiner Arbeit an, den er auch zweifelsohne erreicht hat; er wünscht nämlich die bisher aufgestellten Principien deutlicher zu machen und auch strenger zu beweisen, als es vor ihm geschehen ist und erst dann die dynamischen Kenntnisse zu erweitern.

Man kann ferner nicht mit Unrecht behaupten, dass unser Princip hervorgegangen ist aus dem allgemeinen nicht immer lobenswerthen Eifer der Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der immer von Neuem rege gemacht wurde durch Aufstellung isolirter Probleme, deren Lösungen die Memoiren der Academien von Paris, Berlin und Petersburg anfüllen. Diese Aufgaben beschäftigten sich grösstentheils mit der Bestimmung der Bewegungen verschiedener Körper, die auf einander durch Drähte, Stangen oder Ketten wirken, an welche sie befestigt sind oder längs welcher sie frei gleiten können, und die nach einem gegebenen anfänglichen Anstoss entweder sich selbst im freien Raume überlassen oder gezwungen sind, sich auf ebenen Curven und Flächen zu bewegen. Zur Lösung dieser Aufgaben musste dann meist für jeden

Fall das angemessene Princip aufgefunden werden, so dass man dieselben zur Prüfung des mathematischen Talentes benutzen konnte. Diesen gegenseitigen an sich so unerfreulichen Herausforderungen der durch Hass in zwei feindliche Lager getrennten Mathematiker zum wissenschaftlichen Tournier machte D'Alembert ein Ende, indem er mit Hilfe seines Principes eine allgemeine Methode gab, um jedes denkbare mechanische Problem in eines der mathematischen Analysis zu verwandeln.

Princip des kleinsten Zwanges.

Das Princip des kleinsten Zwanges ist von Gauss aufgestellt worden und lautet folgendermassen: Die Bewegung eines Systems materieller Punkte, auf was immer für eine Art mit einander verbunden, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglichst grosser Uebereinstimmung mit der freien Bewegung und unter möglichst kleinstem Zwang, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erfährt, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner Bewegung in seine Masse betrachtet. Das Princip bedeutet demnach, dass da, wo freie Bewegung unmöglich ist, die Abweichung von ihr im Ganzen genommen so klein als möglich ist, also jede Bewegung oder Ruhe immer die grösstmögliche Freiheit hat.

Die historische Betrachtung ist hier kurz folgende: Gauss hat zuerst dieses Princip aufgestellt *(Opera V p. 26,* zuerst veröffentlicht Crelle *Op. IV p. 232)* und bei keinem Mathematiker vor ihm findet sich eine Andeutung desselben.

Dass Gauss durch seine Untersuchungen über die Methode der kleinsten Quadrate auf dieses Princip gekommen ist, folgt aus der Bemerkung, welche er seiner Auseinandersetzung beifügt: „Es ist merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker nach der Methode der kleinsten Quadrate Erfahrungen ausgleicht, die sich auf einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen."

Princip der Erhaltung der Kraft.

Das letzte Princip, welches in seiner vollständigen Entwickelung der Neuzeit angehört, ist das Princip von der Erhaltung der Kraft, oder das Gesetz von der Constanz der Kraft. Passend wird demselben jetzt der Name Erhaltung der Energie gegeben. Dasselbe ist von Helmholtz 1847 in folgender Form ausgesprochen worden: „In allen Fällen der Bewegung freier materieller Punkte unter dem Einfluss anziehender und abstossender Kräfte, deren Intensitäten nur von der Entfernung abhängig sind, ist der Verlust an Quantität der Spannkraft stets gleich dem Gewinn an lebendiger Kraft und der Gewinn der ersteren dem Verlust der letzteren. Es ist also stets die Summe der vorhandenen lebendigen und Spannkräfte constant." Hierbei ist zu bemerken, dass unter Spannkräften oder unter todten Kräften im Gegensatz zu lebendigen Kräften die zu verstehen sind, welche einen Körper oder einen materiellen Punkt zu bewegen streben, so lange sie noch nicht Bewegung bewirkt haben. Statt der hier gebrauchten Bezeichnung der Kräfte sind jetzt auch die von Rankine aufgestellten Ausdrücke actuelle und potentielle Energie recipirt.

Deutlicher bestimmt dann Helmholtz das Wesen des Principes durch folgende Sätze: 1) So oft Naturkörper vermöge anziehender oder abstossender Kräfte, welche von der Zeit und Geschwindigkeit unabhängig sind, auf einander einwirken, muss die Summe ihrer lebendigen und Spannkräfte eine constante sein, das Max. der zu gewinnenden Arbeitsgrösse also ein bestimmtes endliches. 2) Kommen dagegen in den Naturkörpern noch Kräfte vor, welche von der Zeit und Geschwindigkeit abhängen oder nach anderen Richtungen wirken als der Verbindungslinie je zweier wirksamer materieller Punkte, also z. B. rotirende, so würden Zusammen-

stellungen solcher Körper möglich sein, in denen entweder in das Unendliche Kraft verloren geht oder gewonnen wird. 3) Beim Gleichgewicht eines Körpersystems unter der Wirkung von Centralkräften müssen sich die inneren und die äusseren Kräfte für sich das Gleichgewicht halten, sobald wir die Körper des Systems unter sich unverrückbar verbunden denken und nur das ganze System gegen ausser ihm liegende Körper beweglich.

Das allgemeine Naturgesetz ist schon 1842 von dem deutschen Arzte J. R. Mayer in Heilbronn in einer kleinen aber bedeutenden Abhandlung unter dem Titel „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur“ (Annalen der Chemie von Wöhler und Liebig, B. 42 p. 233) richtig aufgefasst und in seiner jetzt von der Wissenschaft angenommenen Form vollständig ausgesprochen worden, indem derselbe davon ausgeht, dass Kräfte Ursachen sind nnd damit auf dieselben volle Anwendung findet der Grundsatz *causa aequat effectum*. Auch stellt Mayer das Gesetz der Aequivalenz zwischen Wärme und Arbeit als eine unmittelbare Folgerung aus dem Principe der Unzerstörbarkeit der Kraft auf. Merkwürdig ist aber, dass dieser als der eigentliche Entdecker des Principes die Kräfte als imponderable Stoffe bezeichnet und ihre Unzerstörbarkeit nach Analogie der Unzerstörbarkeit der ponderablen Stoffe erschloss. „Zwei Abtheilungen von Ursachen finden sich in der Natur vor“, sagt Mayer, „zwischen denen erfahrungsgemäss keine Uebergänge stattfinden. Die eine Abtheilung bildet die Ursachen, denen die Eigenschaft der Ponderabilität und Impenetrabilität zukommt — Materie; die andere die Ursachen, deren letztere Eigenschaften fehlen — Kräfte, von der bezeichneten negativen Eigenschaft auch Imponderabilien genannt. Kräfte sind also unzerstörliche, wandelbare, imponderable Objecte.“

Auch hatte 1843 der Däne Colding der Academie zu Kopenhagen eine Abhandlung übergeben, welche dasselbe Gesetz behandelt und auch einige Versuchsreihen zu seiner weiteren Begründung enthält.

Aehnliche Versuche sind um dieselbe Zeit in England von dem Physiker Joule angestellt worden, während Carnot und Clapayron aus der Unerschaffbarkeit der Kraft eine Reihe von Sätzen über die Wärme abgeleitet hatten.

Nichts desto weniger gebührt Helmholtz das unsterbliche Verdienst durch seine 1847 erschienene Abhandlung „Ueber die Erhaltung der Kraft“ jenes Princip in seiner ganzen Allgemeinheit zuerst auf alle Gebiete unserer Naturkenntniss wirklich angewandt und hauptsächlich durch die mathematische Präcision der dabei zur Sprache kommenden Begriffe fruchtbar gemacht zu haben. In der That hat sich auch der am Schlusse dieser Abhandlung befindliche Ausspruch, dass die vollständige Bestätigung jenes Principes wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik betrachtet werden müsse, im Laufe der letzten 20 Jahre aufs Glänzendste bewahrheitet.

Das Philosophische dieses Principes ist aber schon alt und von Gelehrten älterer Zeiten bestimmt ausgesprochen, aber nie mit Erfolg auf Naturerscheinungen angewendet worden. Dies mit wenigen Worten zu erläutern, scheint mir nicht überflüssig.

Zuerst finden wir in Bezug darauf passende Bemerkungen bei Cicero *(Tusc. Cap. 23)*, indem derselbe sagt, dass der Anfang der Bewegung in dem ist, was durch sich selbst bewegt wird. Dies kann aber weder entstehen noch vergehen. Diese Ansicht ist aber wahrscheinlich nicht erst von Cicero aufgestellt, sondern vielleicht einem griechischen Philosophen entnommen worden.

Ausgesprochen worden ist ferner der Satz von Descartes, der als Maass der Kräfte die Quantität der Bewegung eingeführt hat, in dem für seine Zeit kühnen, freilich unbewiesenen Satz, dass die Quantität der in dem Universum vorhandenen Bewegung, wie die Menge der Materie von Gott stets constant erhalten werde, weil keine Kraft von einem Körper verlassen werde, ohne auf einen anderen überzugehen, oder weil keine Maschine, also auch die ganze Welt, ihre Kraft vergrössern könne ohne einen neuen Impuls von aussen. So ist es gegeben von Descartes in *Principes de la philos. p. 151* und der Satz für *a priori* einleuchtend hingestellt. Leibnitz schreibt darüber *(Acta erud. 1686): Brevis demonstratio crroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae, secundum quam volunt a deo semper quantitatem motus conservari.*

Dem Descartes entgegen spricht Leibnitz, veranlasst durch die Irrthümer, in die sich Descartes bei der Anwendung seines Princips auf den Stoss der Körper verwickelte, von der Erhaltung der lebendigen Kraft oder der absoluten Kraft *(Essay de dynamique Wer. VI p. 217)* und sagt dann: „Im Universum ist immer dieselbe Kraft; denn die Körper desselben können nicht mit anderen in Verbindung stehen" *(Dynamica pars II Wer. VI p. 440)* und giebt dadurch den Gelehrten der damaligen Zeit Veranlassung, anzunehmen, dass es keine nichtelastischen Körper gäbe; denn es waren nach seinem Principe die Gesetze des Stosses bei derartigen Körpern nicht zu finden. Zu einer richtigen Anwendung des Satzes fehlte aber eine genügende Kenntniss von der Transformation der Naturkräfte, wenn auch Leibnitz schon in der oben erwähnten Abhandlung *Specimen dynam.* folgende Behauptung aufstellt. Eine neue Kraft entsteht nur, indem eine frühere verschwindet und in der Wirkung kann nicht mehr und nicht weniger Kraft als in der Ursache enthalten sein.

Huyghens *(Journal des sav., Mars 1699, Vol. II p. 354)* kommt auch bei Gelegenheit der Erörterung des Stosses vollkommen elastischer Körper darauf, wie wir schon oben zu erwähnen Gelegenheit hatten.

Auch möchte hier ein Ausspruch des Placidus Heinrich Erwähnung finden. Es wird nämlich von demselben (1812) in seinem Werke über die Phosphorescenz der Körper gesagt: „Wir wissen wenigstens soviel mit Zuverlässigkeit, dass in der Natur Nichts verloren geht, Alles erhält sich nur durch einen steten Umtausch, das eine gewinnt durch den Verlust des anderen, also im Universum kein Verlust, nur Wechsel und Umtausch." Freilich bleibt es unentschieden, ob der betreffende Forscher diese Behauptung vielleicht nur auf die Unzerstörbarkeit der Materie bezieht.

Einige englische Schriftsteller, so Akin in seiner Abhandlung über *History of force (Philos. Magaz. 28. 470)* und namentlich Prof. Guthrie Tait, sind sehr geneigt, ihrem grossen Landsmann Newton die Entdeckung des Satzes von der Erhaltung der Kraft zuzuschreiben, indem sie sich unter anderen auf den Ausspruch Newtons beziehen: *A congressu et collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quae*

ex summa motuum conspirantium et differentia contrariorum colligebatur. Dem aber muss entgegengehalten werden, dass Newton nur von einer Massenbewegung spricht und den Beweis der Unzerstörbarkeit der Bewegung aus der ewigen Dauer der Planetenbewegung entnommen hat und dann auch den Satz anwendet auf das Pendel. Auch Thomson kommt zu der Ueberzeugung (Theoretische Physik, Vorrede VII), dass Newton, soweit es der Zustand der experimentellen Wissenschaft seiner Zeit gestattete, diese herrliche moderne Verallgemeinerung anticipirt habe.

Erwähnenswerth ist ferner eine Abhandlung von Mohr (Baumgärtner's Zeitschrift für Physik V), in der auch schon angezeigt ist die Umwandlung der Kräfte. Es heisst dort p. 242: „Ausser den bekannten 54 chemischen Elementen giebt es in der Natur der Dinge nur noch ein Agens und dieses heisst Kraft; es kann unter den passenden Verhältnissen als Bewegung, chemische Affinität, Cohäsion, Elektricität, Licht, Wärme und Magnetismus hervortreten, und aus jeder dieser Erscheinungen können die übrigen hervorgebracht werden. Dieselbe Kraft, welche den Hammer hebt, kann, wenn sie anders angewendet wird, jede der übrigen Erscheinungen hervorbringen."

In Bezug auf die Form, welche man diesem Principe giebt, ist noch ein Ausdruck von Thomson zu berücksichtigen. Dieser nämlich nennt ein System von Körpern ein conservatives System (Theoretische Physik § 271), wenn während jeder beliebigen Bewegung, durch welche es aus einer besonderen Configuration in eine andere übergehen kann, die zwischen seinen Theilen wechselseitig wirkenden Kräfte stets denselben Betrag von Arbeit verrichten oder verbrauchen. Demnach würde unser Princip sich kurz so ausdrücken lassen: „Die ganze Welt ist ein conservatives System."

Ausgangspunkt der Kritik.

Im Folgenden soll nun erörtert werden, wie viel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbstverständlicher logischer Grundsatz, wie viel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundsatzes, wieviel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig gefundenen Erfahrungsthatsache, wieviel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungskenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist. Ohne im Voraus entscheiden zu wollen, ob die Mechanik eine rein theoretische, deductive Wissenschaft ist, oder ob die Erfahrung und damit die Induction in ihr beizubehalten ist, halte ich es erst noch für nothwendig zu erörtern, von welchem Standpunkte man in dieser Wissenschaft auszugehen hat, um nach der Vorschrift über die Principien zu urtheilen. Vor Allem ist es wichtig anzugeben, was man zu verstehen hat, wenn von logischen Grundsätzen gesprochen werden soll. Solche Sätze kann man dann aufstellen, wenn man sich Klarheit über die zu verwendenden Begriffe verschafft hat d. h. nach Aufstellung von Definitionen, denn Grundsätze (Axiome) heissen Urtheile, welche unmittelbar gewiss sind, deren Wahrheit also zugegeben werden muss, sobald die Ausdrücke, in denen sie gegeben werden, klar verstanden sind; demnach sind dieselben einer Begründung weder fähig noch bedürftig und beruhen deshalb auf ursprünglichen Beziehungen der in ihnen enthaltenen Begriffe. Ein wesentlicher Unterschied zwischen allgemeinen Grundsätzen und denen, welche als Grundlage der mechanischen Forschung dienen, besteht aber darin, dass die ersteren Jedem verständlich sind, der im Allgemeinen zu reflectiren vermag, während die letzteren nur für diejenigen die Natur von Axiomen haben, welche das ganze Gebiet der Mechanik übersehen können, und also hinreichende Kennt-

niss der Wirkung physischer Ursachen besitzen, um im Stande zu sein die Wahrheit jener Sätze auf der Stelle einzusehen. Es sind demnach die hier zu betrachtenden Grundsätze ein Resultat langer Erfahrung, ein Ausfluss gereinigter Forschung, also erscheinen sie zunächst als eine Abstraction aus der Erfahrung, mit Hilfe deren auch weiter rückwärts auf die Definitionen geschlossen werden kann. Da damit eigentlich wesentliche Merkmale eines Grundsatzes aufgehoben sind, so möchte ich statt „logischer Grundsatz" lieber setzen „Grundhypothese", deren Möglichkeit dann bewiesen ist, wenn nicht ein Widerspruch gegen sie aus der Erfahrung gewonnen wird, deren Nothwendigkeit, also vollständige Wahrheit, aber erst gefolgert wird, wenn jede andere mögliche Voraussetzung als falsch nachgewiesen werden kann. Ebenso nun wie die ganze Geometrie logisch gefolgert ist aus wenigen Grundsätzen, die ihrerseits nicht weiter erklärbar, nicht weiter demonstrabel sind, verhält es sich mit der Mechanik, auch sie muss deducirt werden aus den Grundhypothesen. Damit ist nun allerdings ein Mangel bezeichnet, und dürfte es ausserhalb der menschlichen Fähigkeit liegen denselben zu beseitigen; denn wollten wir eine Mechanik nicht von irgend welchen unbegreiflichen und hypothetischen Grundvorstellungen, sondern von Sätzen ausgehen lassen, die den Stempel unumstösslicher Sicherheit an sich tragen, die durch sich selber die Bürgschaft unangreifbarer Wahrheit bieten, so würden wir gezwungen sein, zu den Sätzen der Logik und Mathematik unsere Zuflucht zu nehmen. In diesem Sinne spricht sich Leibnitz aus, wenn er sagt: (Werke, herausgeg. v. Gerhardt II. p. 135.) „Er leugne nicht, dass die Naturerscheinungen aus einmal festgestellten Principien mathematisch und mechanisch erklärt werden müssten, aber diese Principien selber seien nicht weiter abzuleiten aus den Gesetzen mathematischer Nothwendigkeit."

Wenn dann erörtert werden soll, wie viel an jedem der aufgestellten Principien ein logischer Grundsatz ist, so verstehe ich darunter, dass angegeben werden soll, wie viel an demselben eine logische Folgerung aus den gegebenen Grundhypothesen ist und wie viel an demselben berechtigt ist den Rang einer Grundhypothese einzunehmen. Bei Erörterung der ersten Frage kann man dann darauf kommen, dass ein mechanischer

Satz ist eine Uebertragung allgemein gültiger Grundsätze auf die Mechanik.

Durch die oben charakterisirte Eigenschaft der Grundhypothesen ist aber keineswegs geleugnet, dass die Mechanik eine deductive Wissenschaft ist; denn das charakteristische Merkmal einer solchen Wissenschaft ist, dass sie nach Feststellung der Definitionen von einer Reihe von Behauptungen ausgeht, die entweder an und für sich klar sind oder wenigstens nicht aus derselben Wissenschaft angehörigen Sätzen abgeleitet werden können, also als deren oberste Sätze betrachtet werden müssen, nur meine ich, dass diese obersten Sätze, von denen man in der Mechanik auszngehen hat, nicht logische Grundsätze sind, sondern nur als mechanische Grundhypothesen betrachtet werden können.

Wenn nun im Folgenden öfter das Wort Grundsatz (Axiom) gebraucht wird, wo es eigentlich sich nur um Grundhypothesen handelt, so ist damit der hergebrachten Ausdrucksweise Concession gemacht und es wird keine Schwierigkeit sein zu entscheiden, ob ein gewöhnlicher Grundsatz oder eine Grundhypothese gemeint ist.

Uebersehen wir nun von dem im Obigen angegebenen Gesichtspunkt die ganze Mechanik, so kann es uns nicht entgehen, dass es vortheilhaft sein wird diese ganze Wissenschaft in Bezug hierauf in besondere Theile zu theilen. Es kann nämlich einmal die Bewegung eines Punktes untersucht werden ohne Rücksicht auf die Materie und auf die Ursache, welche diese Bewegung hervorbringt. Dieser Theil der Mechanik, welcher den Namen Phoronomie oder Kinematik führt, oder auch nicht unpassend Geometrie der Bewegung genannt wird, würde demnach eine Wissenschaft sein, die sich stützt auf die Grundsätze der Mathematik und auf die Definition der Bewegung, mithin als eine rein theoretische Wisssenschaft zu betrachten sein. In diesem Theile der Mechanik können wir mit Zuhülfenahme neuer Definitionen weitergehen, indem wir nämlich die Wegänderung im Verhältniss zur Zeitänderung die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsänderung im Verhältniss zur Zeitänderung die Beschleunigung nennen und letztere verbinden mit dem sogenannten Beschleunigungscoefficienten, der dann in der Anwendung der Gesetze auf die Natur, die Masse bedeutet, und so eine

rein theoretische Wissenschaft bilden, die es immer noch bleiben wird, selbst wenn wir statt einfacher mehrfache Punkte nehmen. Wir können dann auch diese Betrachtungen noch weiter verallgemeinern, indem wir Beschleunigungen höherer Ordnung einführen. Diese Theilung der Mechanik in eine rein theoretische Wissenschaft und in eine solche, die sich auf die Erscheinungen der Natur bezieht, hatte schon D'Alembert im Sinne, wenn er sich so vorsichtig, wie wir es unten beim Princip der verlorenen Kräfte berühren werden, über seinen Kraftausdruck ausspricht, und mit ihm alle anderen Forscher, welche die Kräfte betrachten als die unbekannten Ursachen der Bewegung, welche gemessen werden durch die Beschleunigung. Sobald wir aber übergehen zu den wirklichen Ursachen der Bewegung und zu den materiellen Punkten, also zur Materie, so haben wir eine Mechanik, die sich nicht mehr auf rein logische Grundsätze stützt, sondern nur auf Grundhypothesen. Es kann daher nur, um ein schlagendes Beispiel über den Unterschied dieser Wissenschaftszweige anzugeben, nicht Wunder nehmen, dass in einer rein theoretischen Mechanik nicht die Rede sein kann von einem Princip der Trägheit. Wenn nun aber die Resultate der theoretischen Mechanik, deren Gebilde nur gedachte Dinge sind, wie die geometrischen, auf Phänomene der physischen Welt Anwendung finden sollen, so ist erst noch eine Untersuchung über deren Berechtigung anzustellen.

Wenn nun durch diese Erörterung über die mechanischen Axiome die Ansicht derjenigen Physiker gerechtfertigt zu sein scheint, welche meinen, dass dieselben nur seien von einander unabhängige Erfahrungssätze, so soll im Folgenden die Meinung Anderer Berücksichtigung finden, nach der diesen Sätzen eine Evidenz zuzuschreiben sei, die höher als die Gewissheit der Erfahrung steht, eine Meinung, die sich auch meist kund giebt bei den Entdeckern dieser axiomatischen Wahrheiten; denn diese haben gewöhnlich neben der Begründung derselben durch die Erfahrung eine *a priori* gesucht. Hervorheben müssen wir aber sogleich, dass den Axiomen der Mechanik keineswegs anschauliche Gewissheit zukommt, im Gegentheil bietet die Darstellung des Gegentheils derselben nicht die geringste Schwierigkeit, sie scheint sogar allgemein die leichtere und die näherliegende zu sein;

denn die axiomatischen Sätze der Mechanik werden nicht nur jetzt noch von der gemeinen Erfahrung sehr oft bei Seite gesetzt, sondern viele sind auch innerhalb der Wissenschaft erst in einer verhältnissmässig späteren Zeit zur Anerkennung gekommen, nachdem zuvor das Gegentheil derselben allgemein angenommen worden war. Wenn also auch durch die eben angegebene Thatsache als unumgänglich feststehend behauptet werden kann, dass die Grundhypothesen durch die Erfahrung ihre feste Begründung erhalten haben, so soll nun im Folgenden erörtert werden, dass uns immer noch eine Möglichkeit ihrer Deduction gegeben ist unter Zugrundelegung einer einzigen Hypothesis, die allgemein anerkannt ist und auch, wenn nicht jede Naturforschung für unmöglich gehalten werden soll, beibehalten werden muss.

Diese Hypothesis ist folgende. In der Natur herrscht Gesetzmässigkeit und zwar ausnahmslose, welche jede Spontanität als unmöglich hinstellt. Dieser Satz hat allerdings gewöhnlich eine andere Form; denn man sagt, es müssen alle Erscheinungen einen zureichenden Grund haben, der immer für dieselbe Erscheinung derselbe ist, oder allgemeiner das Causalprincip in der Naturforschung ist ein richtiges Princip.

Nach Feststellung dieses Satzes würde es also die Aufgabe der physikalischen Wissenschaften sein die Erklärung der Erscheinungen der unorganischen Natur nach dem Causalzusammenhange zu geben. Geben wir aber das Gesetz der nothwendigen Causalität in der Natur auf, so fällt mit diesem auch die Annahme der Begreiflichkeit der Natur und damit alle Naturwissenschaft.

Bevor wir dieses Princip einer Erörterung in Bezug auf seine Anwendung in der Mechanik unterziehen, müssen wir die nöthigen Postulate angeben.

Wir setzen als Daseiendes Materie, der nur zukommt erstens Ausdehnung nach drei Richtungen und damit Theilbarkeit in Massenpunkte, die immer noch Ausdehnung haben müssen, zweitens Masse, so dass jeder qualitative Unterschied aufgehoben ist, und damit Undurchdringlichkeit. Im Gegensatz zur Ansicht der Atomistiker postuliren wir ferner, dass diese gesetzte Materie Ursachen unterworfen ist, d. h. dass auf die Materie Kräfte wirken, deren Träger die Materie

selbst wiederum ist. Die Materie ist also das durch die Sinne Wahrnehmbare oder dasjenige was eine Kraft äussern oder die Wirkung einer Kraft erleiden kann.

Die beiden Postulate aber, die Setzung der Materie und derselben innewohnenden Kräfte lassen sich nicht trennen, sondern sie können nur als Abstractionen betrachtet werden, da eine Materie als das nur Daseiende keine Veränderung hervorbringen könnte, völlig gleichgültig wäre, während den Kräften allein das Daseiende, die Materie, fehlen würde.

In Bezug darauf muss allerdings zugegeben werden, was Schelling (Ideen zu einer Philos. d. Natur, p. 128) sagt: „Diese Begriffe sind nicht auf dem Grund und Boden der Physik entsprossen, sondern sie muss gestehen, dass sie auf Principien sich stützt, die aus einer anderen Wissenschaft entlehnt sind.“ Weiter unten, wenn wir von den einzelnen Grundhypothesen sprechen, wird dies noch manche Bestätigung finden, und es wird daher auch wohl gerechtfertigt erscheinen, wenn ich nicht von Axiomen, sondern nur von Grundhypothesen spreche.

Indem wir nun auf eine Betrachtung des Causalprincips eingehen, finden wir, dass dasselbe in der Naturwissenschaft eine doppelte Bedeutung hat; denn es ist dasselbe einmal das oberste Gesetz alles Geschehens und erhält dann die Form: „Alles, was geschieht, hat eine Ursache“, dann aber gilt es als das oberste Regulativ der Forschung und erhält dann, indem man es als den Satz vom zureichenden Grunde bezeichnet, folgenden Ausdruck: „Alles, was geschieht, muss auf eine Ursache zurückgeführt werden, die zur Erklärung zureicht.“

Nur kurz erwähnt sei, dass das Causalprincip die Philosophen vielfach beschäftigt hat. Der skeptische Empirismus, dessen Vertreter Hume ist, fasst das Verhältniss der Ursache zur Wirkung, als eine blos subjective, durch Association wiederholt auf einander folgender Wahrnehmungen psychologisch entstandene Form des Zusammenhangs der Erscheinungen auf. Der kritische Idealismus hält es für eine der Kategorieen, durch welche eine objective Erfahrung erst möglich wird und unter die der Verstand diese Succession der Erscheinungen subsumirt. Der objective und absolute

Idealismus führt alle Causalität ihrem Principe nach auf Selbstbestimmung zurück, welche auch als *causa sui* dem monistischen Realismus zu Grunde liegt. Der dogmatische Empirismus denkt die Ursache als äussere in der Form einer thätigen Kraft, der ein leidender Stoff gegenüber steht, welcher nur die Empfänglichkeit für die Wirkung der Kraft besitzt.

Es ist klar, dass wir uns nach den oben aufgestellten Postulaten auf den zuletzt angeführten Standpunkt zu stellen haben und es nur einer Erörterung bedarf wie wir dieses allgemeine Princip unter Berücksichtigung der gestellteu Postulate zu einer weiteren Benutzung gewissermassen beschränken müssen. Nachdem wir eine unveränderliche Materie gesetzt haben und auch auf diese wirkende Kräfte, so bleiben nur noch Erscheinungen, hervorgebracht durch die Kräfte, die wir als letzte Ursache hinstellen und deren Wirkungsweise nun erörtert werden kann, während es ein Problem der Philosophie ist das Reale der Materie und der Kräfte einer weiteren Untersuchung zu unterwerfen und damit auch das Causalgesetz weiter zu prüfen.

Bei den Erscheinungen dürfen wir also nicht mehr an die Gegenstände denken, so dass also uns diese nur in räumlichen und zeitlichen Verhältnissen gegeben sind. Daraus geht hervor, dass das Causalprincip in der Naturforschung verlangt, dass unsere Sätze unseren Anschauungen von Raum und Zeit entsprechen.

Um nun die Methode zu bestimmen, welche wir anwenden müssen, um mit Hilfe des Causalprincips für die Phänomene der physischen Körper zu folgern, betrachten wir das Regulativ der Naturforschung vom zureichenden Grunde.

Es scheint zunächst das Wort zureichend eine Unbestimmtheit zu enthalten, die dem Gutdünken des Untersuchers einen weiten Spielraum zulässt. Das Wort zureichend soll aber nicht blos aussagen, dass der Grund zur Hervorbringung der bestimmten Wirkung nicht unzureichend sein dürfe, sondern, dass wir auch zureichenden Grund haben müssen, diesen bestimmten Grund gerade vorauszusetzen. Indem wir nun unser Regulativ in den Naturwissenschaften anwenden, haben wir zweierlei zu bedenken. Jede zusammengesetzte

Wirkung müssen wir in die einfachsten Einzelwirkungen, aus denen sie gebildet wird, zerlegen und demgemäss ist ebenso das zusammengesetzte Phänomen, welches gewöhnlich Ursache genannt wird, in eine Reihe einfacher Ursachen zu zerlegen. Es heisst dann derjenige Theil eines zusammengesetzten Phänomens die Ursache für einen bestimmten Theil eines anderen zusammengesetzten Phänomens, sobald jener erste diesen zweiten unverändert hervorbringt, auch wenn man alle übrigen Theile der beiden Phänomene entfernt oder verändert. Das Wort zureichend führt ferner darauf, dass man es immer, wenn mit Hilfe des Satzes vom zureichenden Grunde gefolgert werden soll, mit einem Obersatze zu thun haben wird, der ein disjunctives Urtheil mit einer unbestimmten Anzahl von Gliedern bildet. Man wird also dann erst die richtige und nothwendige Ursache gefunden haben, wenn bei Folgerung mit Hilfe des Causalprincips das Wort zureichend entfernt werden kann, also der Obersatz des Schlusses nicht mehr disjunctiv ist.

Hiermit ist der Weg zur Anwendung des allgemeinen Causalgesetzes zur Auffindung von Grundhypothesen gegeben, denn es ist nun die Art des Obersatzes bestimmt zu dem das allgemeine Causalprincip als Untersatz gehört, um dann folgern zu können. Den Obersatz finden wir nämlich durch die eben charakterisirte Methode der Naturforschung unter Berücksichtigung dessen, dass, wie oben auch schon angegeben, weil wir bei den Erscheinungen stehen bleiben, derselbe unseren Anschauungen conform sein muss. Wir werden demnach bei der Aufsuchung der Grundhypothesen, unsere Anschauung von allen Vorstellungen mit Ausnahme derjenigen, auf welche sich das Axiom bezieht, frei machen und damit zu einem einfachen Phänomen gelangen, zu dem wir die eben auch einfache Ursache finden.

Von diesem hierdurch charakterisirten Standpunkte ausgehend, finden wir zunächst, dass alle Ursachen in der Natur Bewegungsursachen oder alle Kräfte Bewegungskräfte sind.

Wir sind damit in der modernen Physik auf dem besten Wege der Forderung zu genügen, die man dadurch ausdrückt, dass die Physik sich zu einer angewandten Mechanik entwickeln müsse. Dass die Realität jedwelcher qualitativen

Veränderung zu leugnen ist, und die Verschiedenheit der Qualitäten nur in Kräften also Bewegungsursachen beruht, widerspricht aber sowohl der unmittelbaren Anschauung als auch einer schon sehr geläuterten Naturforschung, indem es, wenn auch die Annahme einer qualitativen Veränderung der Elementarbestandtheile schon seit dem vorigen Jahrhundert aus der Physik verdrängt worden ist und man alle Veränderungen in Bewegung begründet annehmen möchte, noch nicht gelungen ist überall von der Qualität des Bewegten zu abstrahiren.

Um über diesen Satz zu entscheiden, müssen wir bedenken, dass uns die Dinge nur durch eine Vorstellung von denselben gegeben sind; demselben Dinge verschiedene Vorstellungen substituiren, heisst also für unsere Anschauungen verschiedene Dinge setzen, während wir durch Reflexion gezwungen sind zu behaupten, dass das Ding geblieben sei. Ortsveränderung ist nun die einzig vorstellbare Veränderung der Dinge, bei welcher diese selbst identisch bleiben, mithin kann nach dem Causalprincip die Ursache der Veränderung der Dinge nur beruhen in Ortsveränderungsursachen.

Nachdem wir hiermit das Wesen der Kräfte bestimmt haben, soll in der zweiten Grundhypothese der Sitz dieser Ursache gegeben werden, indem wir behaupten, dass die Bewegungsursachen ausserhalb des Bewegten liegen.

Denken wir uns einen materiellen Punkt im Raume sich bewegen, so müssen wir, um die Ursache der Bewegung zu finden, alles Andere, was nicht zu der Bewegung des Punktes nothwendig ist, entfernen, um die Bedingungen zu vereinfachen. Stellen wir uns demnach blos einen Punkt vor und entfernen sonst Alles, den Zuschauer mit eingeschlossen, aus der Vorstellung, so ist der Punkt nicht in Bewegung; denn diese ist nur möglich im Verhältniss zu anderen Punkten. „Wenn hiermit (Wundt: Die physikalischen Axiome, p. 120) bewiesen ist, dass jeder Punkt nur bewegt gedacht werden kann in Bezug auf einen anderen Punkt, so liesse sich jedoch immerhin sagen: die eigentliche Ursache der Bewegung liegt doch im Bewegten selber, und der äussere Punkt ist nur eine Bedingung, unter der die Ursache zur Aeusserung gelangt. Hier giebt nun das Causalgesetz die

Entscheidung. Dieses sagt uns: die Ursache ist dasjenige Phänomen, das zur Hervorbringung der Wirkung unerlässlich ist. Wirkung ist in diesem Fall die Bewegung. Denkbare Ursachen sind zwei vorhanden: der bewegte Punkt selbst und der andere, in Bezug auf welchen er sich bewegt. Denke ich mir nun den zweiten Punkt weg, so hört die Bewegung auf: das Experiment lehrt also, dass dieser letztere die Ursache sein muss. Wir können den hieraus sich ergebenden Schluss allgemein aussprechen: Bewegungen sind nur denkbar durch das Zusammensein der Dinge, die Ursache jeder einzelnen Bewegung muss also ausserhalb des Bewegten liegen."

Dass uns die Annahme einer Bewegung zur Aufstellung eines neuen Postulates zwingt, ist von C. Neumann bei Erörterung des folgenden Axiomes genauer erörtert. Es führt nämlich dieselbe zu dem Postulate eines im Raume absolut festen Punktes. Dieses Postulat ist aber, da uns das vorige Axiom zur Annahme einer Bewegung gezwungen hat, gerechtfertigt. Wollten wir ferner dieses Postulat nicht *a priori* anerkennen, so müssten wir damit auch behaupten, dass der mechanische Begriff der Bewegung nicht richtig sei und damit würde auch die Geometrie der Bewegung den Werth einer theoretischen Wissenschaft verlieren und wir würden damit in Untersuchungen kommen, welche unser Gebiet überschreiten.

Wir fragen dann naturgemäss, wie diese Bewegungsursache wirke, und erhalten die Antwort, dass die Kräfte wirken in gerader Linie ihres Ausgangs- und Angriffspunktes. Diesem Satze scheint in der Natur oft widersprochen zu werden, so z. B. durch die sogenannte elektrische und magnetische Richtkraft. Zur Deduction dieser Bestimmung über die Kraft müssen wir bei der im Obigen verlangten Abstraction stehen bleiben. Wir müssen uns also nur zwei Punkte vorstellen, dann giebt es kein räumliches Verhältniss mehr als das Lagerverhältniss dieser zwei Punkte zu einander. Dadurch ist aber nur die Gerade bestimmt, welche sie verbindet; soll demnach der eine Punkt auf den anderen bewegend einwirken, so kann die Bewegungsursache nur in der Richtung der die Punkte verbindenden Geraden wirken; denn zu jeder anderen Richtung der Kraft müssten wir einen neuen

Bestimmungsgrund hinzunehmen, hätten also unser Phänomen in ein zusammengesetztes verwandelt.

Hieraus folgt zugleich, dass die Grösse der Ursache oder der Kraft jedenfalls nur abhängig ist von der gegenseitigen Entfernung der Punkte, zwischen denen dieselbe wirkt; denn nur diese ist bei unserer Abstraction bestimmt. Es kann also hier sogleich abgeleitet werden, dass die Grösse der Kraft von der Geschwindigkeit der sich bewegenden Punkte nicht abhängig sein kann. Wenn wir bei der oben vorgeschriebenen Vereinfachung der Erscheinung stehen bleiben, nur uns die beiden Punkte sich einander nähernd denken, so werden wir bald erkennen nach dem Causalgesetz, dass eine Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit undenkbar ist. Die Bewegung und damit die Geschwindigkeit sind Folge der Kraft, es müsste also bei einer Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit Ursache und Wirkung vertauscht werden können. Dies enthält nun allerdings, wie unten beim Princip der Erhaltung der Kraft gezeigt werden kann, keinen Widerspruch, aber wir können nun das angegebene Phänomen nicht mehr für ein einfaches halten, da eine Veränderung schon angenommen ist, welche eben eine Ursache haben muss, die wir Kraft nennen. Nach diesen Erörterungen bleiben also nur Centralkräfte übrig, d. h. solche Kräfte, die von den materiellen Punkten ausgehen und gerichtet sind nach den geraden Verbindungslinien derselben und deren Intensitäten nur abhängen von den Abständen dieser Punkte.

Hiermit freilich treten wir in Widerspruch mit Gesetzen, welche in der Physik behandelt werden. In Bezug darauf lässt sich aber immer sagen, dass diese gefolgert sind aus provisorischen Definitionen, zu denen sicher z. B. die allen elektrischen Erscheinungen zu Grunde liegende Annahme elektrischer Massen gehört.

Es kann ferner nicht unbeachtet bleiben, dass wir uns durch diese Grundhypothese in neue Schwierigkeiten bringen, die sich, wie folgt, recht grell darstellen lassen. Im Weltraum erschallen fortwährend Befehle, infolge der Anziehungskraft, ausgehend von den einzelnen Himmelskörpern, und jeder Weltkörper ist unablässig bemüht, diese Befehle, von denen er keinen überhört, aufs pünktlichste auszuführen,

so dass er auch jedem einzelnen wiederum nach der nächsten Grundhypothese vollständig genügt. Nicht minder schwierig ist zu begreifen die Vorstellung, die C. Neumann (Mathem. Annalen I p. 317) der Theorie der Elektrodynamik zu Grunde legt, nach der ein von einem Massenpunkte gegebener Befehl nicht momentan zum anderen hingelangt, sondern eine gewisse Zeit brauchen soll, um den Weg von einem Punkte zum anderen zu durchlaufen. Suchen wir uns eine Vorstellung von diesen räthselhaften Vorgängen zu machen, so müssen wir uns gestehen, dass wir hier vor einer Thatsache stehen, die nicht minder geheimnissvoll und unbegreiflich ist, als die Uebertragung persönlicher Willensacte auf das Gebiet der materiellen Veränderungen und wir stimmen gern mit Kant überein, der (Anfangsgrund der Naturwissensch.) die Frage nach der Ursache der allgemeinen Attraction in das Gebiet der allgemeinen Metaphysik verweist.

Der postulirten Materie schreiben wir Trägheit zu, oder sagen, dass ein Körper nicht von selbst seinen Zustand ändern kann, wodurch wir den Grundsatz, die Wirkung jeder Ursache verharrt, auf die Materie übertragen. Es soll damit zweierlei gesagt werden: erstens, dass ein Körper nicht von selbst aus dem Ruhezustand in Bewegung übergehen kann und dass ein in Bewegung gesetzter Punkt, falls keine fremde Ursache auf ihn einwirkt, also vollständig sich selbst überlassen bleibt, in gerader Linie fortgeht und und zwar so, dass er in gleichen Zeiten gleiche Wegabschnitte zurücklegt; zweitens sagt der Satz noch, dass die Wirkung verharrt, selbst wenn eine neue Ursache hinzutritt.

„Der erste Satz", deduciren wir nach Wundt, p. 122, „ist offenbar nur eine specielle Formulirung des Causalgesetzes, da er auf den speciellen Fall der Aenderung vorhandener Wirkungen anwendet, was das Causalgesetz selbst allgemeiner schon ausspricht. Denn da nach dem Causalgesetz jedes Geschehen, d. h. jede Veränderung, eine Ursache haben muss, so müsste auch für den plötzlichen Stillstand einer einmal in Gang gebrachten Bewegung eine Ursache gefunden werden. Den zweiten Satz prüfen wir auf seine Anschaulichkeit, indem wir uns zunächst einen Punkt durch vorausgegangene Ursachen in Bewegung begriffen denken. Um nun die Veränderung zu erfahren, welche eine neu

hinzukommende Kraft erzeugt, haben wir uns den bewegten Punkt isolirt vorzustellen und dann das neue Kraftcentrum hinzuzudenken. Ein isolirt vorgestellter Punkt ist aber, wie wir gesehen haben, nothwendig ruhend in unserer Vorstellung (besser wohl, ist nicht in Bewegung). Das hinzugedachte Kraftcentrum für sich, d. h. wenn ich von der schon vorhandenen Bewegung abstrahire, wirkt daher ebenso, als wenn es zu einem vorher in Ruhe befindlichen Punkte hinzukäme, und dies ist es, was der Satz vom Beharren der Wirkung verlangt."

Der zweite Theil unseres Satzes ist für die Mechanik ausserordentlich wichtig, denn er enthält die Möglichkeit die Wirkung verschiedener Kräfte auf einen Punkt zu übersehen mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. Es ist nach ihm einerlei, ob zwei Kräfte gleichzeitig oder nach einander auf einen Körper wirken, weil die Wirkung der ersteren beharrt auch wenn die zweite dazukommt, welche dann dieselbe Wirkung ausübt, wie auf den Körper im Ruhezustande und daher die der ersten Kraft ebenso verändert, wie es bei gleichzeitiger Wirkung geschehen wäre. Es liegt dann umgekehrt auch kein Bedenken vor, bei einer hervorgebrachten Bewegung sich diese verursacht zu denken als Folge einer oder mehrerer gleichzeitig wirkender Kräfte.

Unser Princip ist von C. Neumann (Antrittsvorlesung 1869) einer genauen Untersuchung unterworfen und von ihm gezeigt worden, dass dasselbe nicht als ein einziges Princip acceptirt werden dürfe, sondern bei genauer Betrachtung aufgelöst werden müsse in eine grössere Anzahl theils fundamentaler Principien, theils sich anlehnender Definitionen, wie die der Ruhe, Bewegung und die gleich langer Zeitabschnitte. Nach der Charakterisirung unseres Standpunktes gehen diese Principien über unsere Postulate hinaus und gehören demnach in das rein philosophische Gebiet.

Die Wahrheit der Sätze von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte erhält auch noch durch folgende Betrachtung eine wesentliche Bestätigung. Es ist angegeben worden, dass wir eine rein theoretische Mechanik aufbauen können, gegründet auf die Definition der Bewegung und auf die geometrischen Axiome. In dieser können die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten rein geome-

trisch abgeleitet werden. Da nun nach unserem vorigen Axiome die Kräfte nur Richtung und Grösse besitzen, so können sie wie Geschwindigkeiten durch gerade Linien dargestellt werden, welche die Richtungen der Kräfte haben und deren Längen den Grössen derselben beziehungsweise proportional sind; da ferner die Kräfte, wie oben erörtert, gemessen werden durch die Aenderung der Bewegung, die sie erzeugen, und da ihre Richtungen sich durch die bestimmen, in denen diese Aenderungen vor sich gehen, so wird die Resultante einer beliebigen Anzahl von Kräften durch dasselbe geometrische Verfahren wie bei den Geschwindigkeiten ermittelt werden können. Zu denselben Schlüssen werden wir gelangen können durch das in der theoretischen Mechanik entwickelte Gesetz des Parallelogramms der Beschleunigung.

Nur kurz berührt soll werden, dass auf unserer Grundhypothese die allgemein angenommenen Zeitmessungen beruhen; denn wir nennen die Zeitabschnitte einander gleich, in denen ein Körper, der nur infolge der Trägheit sich bewegt, gleiche Wege zurücklegt.

Wenn nun in der theoretischen Mechanik die Aenderung der Geschwindigkeit oder die Beschleunigung als ein rein geometrisches Element betrachtet wird und sich ergiebt, dass diese, sobald wir von der Masse abstrahiren, als ein Maass der Kraft benutzt werden muss, dass ferner diese Kraft auch proportional der Masse ist, wodurch der Beschleunigungscoefficient in die Masse übergeht, so folgt, dass wir die Beschleunigung mal der Masse als ein richtiges Maass der Kraft benutzen können, so dass sich dadurch die rein geometrischen Untersuchungen der Bewegungslehre in die der allgemeinen Mechanik übertragen, d. h., dass sich zu jedem Satze der theoretischen ein entsprechender der allgemeinen Mechanik findet. Dabei muss freilich immer noch zugestanden werden, dass selbst für den Fall, dass die Sätze der letzteren Wissenschaft wegen der noch vorhandenen Hypothesen nicht wahr wären, jene ersteren immer noch ihre absolute Richtigkeit behielten.

Wir kommen nun zu dem letzten Grundsatz, der uns einen Aufschluss geben soll, wie wir verwickeltere Bewegungsfälle vollständig verstehen können. Wirkung und

Gegenwirkung sind einander gleich *(actio est par reactioni)*. Damit ist gesagt, dass, so oft ein materieller Punkt eine Wirkung auf einen anderen hervorbringt, dieser letztere immer eine gleiche, aber entgegengesetzte, auf den ersteren ausübt, und zwar so, dass wenn die beiden Punkte auf unveränderliche Weise mit einander verbunden wären, die beiden Wirkungen sich vollständig aufheben würden.

Newton hat diesen Satz als einen der drei Grundsätze seiner Naturphilosophie *(Lex III)* mit folgenden Worten aufgestellt: *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequalem et in partes contrarias dirigi*, und dann unter anderen die Anwendung gemacht, dass bei einer gegenseitigen Einwirkung der Körper auf einander deren Schwerpunkt nicht afficirt werde.

Die Deduction dieser Grundhypothese ist nach Wundt *p. 122* folgende: „Denken wir uns wieder zwei Punkte, die in gegenseitiger Bewegung begriffen sind, und nehmen alles Andere, den Vorstellenden mit eingeschlossen, aus der Anschauung hinweg. Wollten wir nun annehmen, blos der eine Punkt bewege sich gegen den anderen, während dieser in Ruhe bliebe, so wäre damit die Forderung gestellt, dass die Punkte nicht blos eine gegenseitige Lage besitzen, sondern dass ihnen eine absolute Lage in einem Anschauungsraume zukommt, was nur möglich ist, wenn ich mir den Vorstellenden hinzudenke."

Princip der Erhaltung der Kraft.

Hieran knüpft sich der Reihenfolge der Principien bei der historischen Aufstellung entgegen die Erörterung über das neueste Princip, nämlich über das der Erhaltung der Kraft. Ich nehme deswegen diesen Satz voraus, weil, wie aus dem Folgenden hervorgehen soll, derselbe vielleicht mit Recht als eine Grundhypothese angesehen werden kann und auch schon, wie oben angegeben, unter der Form: Jede Wirkung ist äquivalent ihrer Ursache (*causa aequat effectum*) unter die physkalischen Axiome gestellt worden ist.

Es soll nun zunächst angegeben werden, dass dieses Princip denselben Rang einnehmen muss, den die früheren als Grundhypothese genommenen Sätze haben; denn auch er wird sich aus dem Causalgesetz entwickeln lassen. Wir gehen deswegen zurück auf das anfangs gegebene Postulat eines unveränderlichen Bestandes von Massentheilchen und haben dann eine Kraft nach dem Obigen uns nur vorhanden zu denken an den Massentheilchen, die wir ja eben auch nur wahrnehmen können durch die Wirkung dieser Kräfte auf unsere Sinne. Nach Feststellung dessen ist es dann geboten anzunehmen die Unerschaffbarkeit und Unvernichtbarkeit der in den Massentheilchen innewohnenden einfachen Kräfte, die als Centralkräfte bestimmt worden sind, so dass dieselben nach dem Causalprincip nicht aus Nichts von Neuem vermehrt werden können. Der in der Natur vorhandene Kraftvorrath ist also constant wie der Massenvorrath.

Wir haben uns demnach den Uebergang der Massentheilchen zu den Naturkörpern oder genauer zu dem in einem bestimmten Zeitpunkte stattfindenden Zustand eines Körpers folgendermassen zu denken. Jeder Zustand eines Körpers ist aufzufassen als das Resultat oder als die Summe aller der Veränderungen, welche die Kräfte an den Massentheil-

chen desselben hervorgebracht haben im Gegensatz zu der noch vorhandenen Summe, von der alle zukünftigen Veränderungen des Körpers abhängen. Wenn wir nun die Summe der erreichten Veränderungen als die Wirkungen bezeichnen, während die noch nicht in Wirkungen verwandelten Kräfte die Ursachen sind, so wird sich demnach die eben gefolgerte Behauptung so darstellen lassen: die Summe der Wirkungen und Ursachen in der Welt ist constant.

So erscheint also dieser unser Satz zunächst als eine Folgerung, zu der man gelangt durch Schlüsse der Analogie von der Materie zur Kraft, erhält aber eine sichere Begründung durch die für den Naturforscher nöthige Annahme einer qualitativ und quantitativ unveränderlichen Materie mit derselben innewohnenden Kräften, die also dann auch nach dem Causalprincip unveränderlich sein müssen.

Wir werden später auch noch öfter Gelegenheit haben zu bemerken, dass dieser unser Satz auch insofern als Grundhypothese gesetzt werden darf, als er das Fundament bildet, auf das wir uns stützen, um durch die mathematische Form der Principien bedingte Beschränkungen derselben richtig deuten zu können, dann auch um von manchen Erscheinungen eine genügende Erklärung geben zu können und endlich auch, um über provisorisch aufgestellte Gesetze entscheiden zu können. Ja die umfassende Allgemeinheit des Satzes führt zu der Erkenntniss, dass die Bewegungen der kleinsten Körpertheilchen nach denselben Gesetzen sich richten wie die grossen Massen der Himmelskörper, und dass es nur in der Beschaffenheit unserer Sinne liegt, wenn wir jene kleinen unsichtbaren Bewegungen der Materie als besondere Qualitäten der Bewegung auffassen und nicht in ihnen die Elemente des Raumes und der Zeit, wie in den sichtbaren Bewegungen der Körper wiederfinden.

Nun muss erörtert werden, wie dieser Satz, welcher nach der bisherigen Erörterung nur ein Abstractum ist, ein für die analytische Mechanik wichtiges Moment werden kann, wodurch die Frage beantwortet wird, wieviel an demselben die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung ist.

Da wir uns die ganze Welt aus Elementen von unveränderlicher Qualität bestehend denken, so bleiben, wie oben

schon ausführlich angegeben ist, als einzige noch mögliche Aenderungen in einem solchen Systeme räumliche, oder so beruhen alle Veränderungen auf Bewegungen. Mit Hilfe dieser Bemerkung, welche eine rein logische Consequenz der Annahme von der Unveränderlichkeit der Materie der Quantität und Qualität nach enthält, wird der im Obigen gegebene Zustand eines Körpers nach mechanischen Betrachtungen sich ausdrücken lassen durch das halbe Produkt aus der Masse oder Massentheilchen und dem Quadrate der Geschwindigkeit derselben, eine Grösse, welche mit dem Namen der lebendigen Kraft oder auch Bewegungsenergie (Kinetische Energie) bezeichnet wird. Dass dieser Ausdruck aber eine rein mathematische Form ist, lässt sich leicht übersehen, trotzdem dass sich Leibnitz bemüht hat darzuthun, dass auf dieses Kräftemaass Vernunft und Erfahrung hinleiten, dass es eine metaphysische Erkenntniss sei. Denn wenn es auch von selbst einleuchtet, dass die Grösse der Wirkung einer bewegten Masse durch ihre Geschwindigkeit und durch die Masse bestimmt ist, so wird man doch ohne die mathematische Behandlung constant wirkender Kräfte nie zum Quadrate der Geschwindigkeit kommen; denn der Begriff einer beständig und unveränderlich wirkenden Kraft führt nur mit Zugründelegung des Satzes, dass eine Bewegung ewig bleibt zu der Gleichung $c = gt$. Obgleich nun ganz richtig behauptet werden kann, dass eben in dieser Gleichung das Weitere schon enthalten ist, so muss doch zugegeben werden, dass eben nur die mathematische Behandlung dieser Gleichung zu der betreffenden Form des Kräftemaasses führt. Die noch nicht in Wirkung getretene Kräftesumme hat man mit dem Namen potentieller Kraft oder Spannkraft (potentieller Energie im Gegensatz zu actueller Energie) belegt, weil ein Körper, der unter dem Einflusse einer Kraft steht und durch einen Widerstand verhindert ist, dem Zuge jener Kraft Folge zu leisten, einen gewissen Druck oder eine Spannung auf seine Unterlage ausübt; so enthält z. B. ein durch Aufwand von Arbeit in die Höhe gehobenes Gewicht, eine gespannte Feder, comprimirte Luft eine Spannkraft. Diese Spannkraft ist dann dem gewöhnlichen mathematischen Ausdruck der Kraft unterworfen, wobei freilich erst volle Giltigkeit erreicht ist, wenn wir nach dem Obigeu nur bis zu

einfachen Kräften oder Centralkräften zurückgegangen sind. Durch Einführung dieser Ausdrücke nimmt der Satz die Form an, welche er nach dem Früheren von Helmholtz erhalten hat. Darnach darf bei Verwendung von lebendiger Kraft oder von Spannkraft niemals etwas verloren gehen, es muss eine unveränderte Uebertragung derselben stattfinden und wenn Verwandlungen vor sich gehen, so muss der Betrag der lebendigen Kraft und der Spannkraft nach der Verwandlung derselbe sein wie vorher.

Es bleibt nun noch übrig die Stellung des Princips zur Erfahrung zu untersuchen. Der Weg, welchen wir bei dieser Erörterung einzuschlagen haben, wird klar vorgezeichnet von Helmholtz am Schluss der oben schon citirten Abhandlung und es wird dadurch zugleich nachgewiesen, dass das Princip nicht genommen werden kann als Ausdruck einer allgemein gültig gefundenen Erfahrungsthatsache. Man kann vielmehr behaupten, dass es vielleicht keinen Satz der Mechanik giebt, welcher so sehr wie dieser in der Erfahrung selbst einen scheinbaren Widerspruch fände. Wir beobachten hundertfältig in der Natur, wie die Wirkungen der Kräfte allmälig verschwinden und nichts scheint daher natürlicher als die Annahme, dass die Wirkungen abnehmen und endlich erlöschen. Auch scheint es uns bei oberflächlicher Betrachtung nicht an Beispielen zu fehlen, bei denen die Wirkungen ihre Ursachen übertreffen und zwar namentlich in den Thatsachen der chemischen Verwandtschaftsäusserungen. Auch giebt es eine grosse Anzahl von Vorgängen, wo, wie man zu sagen pflegt, durch eine physikalische Potenz eine andere erzeugt wird, wie z. B. Licht durch Wärme, Wärme und Elektricität durch Reibung, Elektricität durch Wärme sowie umgekehrt Wärme und Licht durch Elektricität. Man betrachtet eben diese Processe als wahre Erzeugungsprocesse, bei denen das Erzeugende neben dem Erzeugten fortbesteht und nimmt dadurch stillschweigend eine Vermehrung der Naturkräfte an.

Der von Helmholtz angegebene Weg ist enthalten in folgenden Worten: „Die vollständige Bestätigung jenes Princips ist wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik zu betrachten.“ Dies Problem ist nun wirklich, wie unten weiter angegeben werden soll, theilweise

gelöst worden und zwar vor Allem in der Lehre von der Wärme, deren innere Natur gegenwärtig ebenso bestimmt, als eine Molekularbewegung erkannt worden ist als dies schon früher bei den Erscheinungen des Schalles und des Lichtes der Fall gewesen ist, so dass man jetzt schon statt der im Obigen dargestellten Zweitheilung der Energie drei Arten der Energie, nämlich: Bewegungsenergie, Wärmeenergie und potentielle Energie unterscheidet. Es wird also wohl behauptet werden können, dass wir auf dem besten Wege sind, die Richtigkeit der Hypothese immer mehr durch genauere Kenntniss über die Vorgänge in der Natur zu bestätigen und auch umgekehrt mit Hilfe dieses Princips über solche Phänomene richtig zu urtheilen, als deren Ursache wir physische und chemische Kräfte im Gegensatz zu mechanischen substituiren.

Hierbei drängt sich von selbst die Bemerkung auf, dass unser Satz eine ihm eigene Wahrscheinlichkeit *a priori* hat; denn trotz des schroffen Widerspruchs, in dem derselbe mit der Erfahrung tritt, hat man doch, wie die Geschichte seiner Entstehung zeigt, der sich sträubenden Erfahrung gegenüber immer an dem Satz von der Aequivalenz der Wirkung mit ihrer Ursache oder der Erhaltung der Kraft in irgend einer Form festgehalten. Ja wir können bemerken, dass die speculative Forderung des Princips so gross ist, dass sie sogar der Erfahrung sichtlich Zwang anthut, um in ihr zur Geltung zu kommen, oder auch die Richtigkeit allgemein aufgestellter Gesetze, selbst wenn denselben durch die Erfahrung nicht widersprochen zu werden scheint, dennoch bezweifelt, wenn das aufgestellte Gesetz sich nicht mit dem Princip vereinigen lässt, und in das Gebiet der provisorischen Gesetze verweist. Es scheint mir aber dennoch zu weit gegangen zu sein, wenn Mohr (Mechanische Theorie der chemischen Affinität p. 54) sagt: „Eine solche gegen das Princip der Erhaltung der Kraft direct anlaufende Behauptung würde Niemand zu beweisen im Stande sein und das desfallsige Bemühen würde dem Versuche gleichkommen, das Einmal-Eins auf einem Irrthum zu ertappen. Das Verschwinden oder Erscheinen einer Kraft wäre eine Bresche in die Gesetze des Denkens und in die der Natur.“

Nur kurz erwähnt seien die Erscheinungen, welche ohne Weiteres die Richtigkeit des Princips bestätigen. Es gehören hierher alle Bewegungen, welche unter dem Einfluss der allgemeinen Gravitationskraft vor sich gehen, also die der himmlischen und der schweren irdischen Körper, wenn wir nur bedenken, was schon oben bei dem Postulat über die Materie angegeben worden ist, dass die Materie auch in ihren kleinsten Theilen einen Raum einnehmen muss. Es ist evident der Satz bei der Uebertragung von Bewegungen durch incompressible Körper und der Bewegung vollkommen elastischer Körper, wenn zu der vollkommenen Elasticität noch hinzugerechnet wird, dass im Innern keine Reibung der Theilchen stattfindet. Dies sind Bewegungen, die bei dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft wiederum betrachtet werden müssen.

Weiter will ich aber versuchen nachzuweisen, wie dem Principe nicht widersprochen wird durch Phänomene, bei denen ein absoluter Verlust oder Gewinn von Kraft beobachtet zu werden scheint, sondern wie im Gegentheil dieselben eine Stütze für die Richtigkeit des zu erörternden Princips werden können, wenn wir die Transformation verschiedener Naturkräfte benutzen und angeben, wie aus Massenbewegungen Molekularbewegungen entstehen können, eine Umwandlung, die Leibnitz (Werke p. 775) erläutert durch ein sinnliches Bild, indem er sagt, es sei dies wie das Umwechseln eines grossen Geldstückes in Scheidemünze.

Im Obigen ist schon öfter die Erscheinung des Stosses unelastischer Körper angeführt worden und zwar mit der Bemerkung, dass eine vollständige Erklärung der dabei beobachteten Erscheinungen zu unüberwindlichen Schwierigkeiten geführt hat. Es geht factisch bei dem Stosse solcher Körper Nichts von Kraft verloren, sondern dieselbe wird zum Theil verwandelt in Spannkraft, indem der Stoss meist verbunden ist mit einer Formänderung und Verdichtung der zusammentreffenden Körper, zum anderen Theil geht die Körperbewegung über in eine der Massentheilchen, welche an die anstossenden festen und luftförmigen Körper abgegeben wird, so dass sie den Schall hervorbringt oder Wärme erzeugt, die bei öfterer Wiederholung leicht wahrzunehmen ist, wie z. B. bei dem Hämmern eines Metallstückes.

Damit ist allerdings noch ein Phänomen erwähnt, welches sich nicht leicht zu einer genauen Untersuchung eignet. Bequemer ist dies bei einer anderen hierhergehörigen Erscheinung, nämlich der der Reibung, sowohl derjenigen, welche auf der Oberfläche zweier Körper, welche sich auf einander bewegen, als auch derjenigen, welche im Innern bei der Formänderung stattfindet. Bei Beiden scheint nach oberflächlicher Beobachtung Arbeit absolut verloren zu gehen oder auch eine Kraft zu entstehen, welche mit dem Aufhören der Bewegung verschwindet und sofort bei einer neuen Ortsveränderung entsteht, um Widerstand zu leisten. Die Einführung dieser Kraft bei mechanischen Untersuchungen ist aber nur ein Mittel zur Erleichterung der Rechnung, wie sich ergiebt, wenn wir die dabei vorgehenden Veränderungen genauer betrachten. Der Reibungswiderstand besteht darin, dass bei den sich über einander bewegenden Körpern oder Massentheilchen eine Hemmung entsteht durch den senkrechten oder schiefen Anprall hervorragender Theilchen, so dass entweder einige von den Hervorragungen abgebrochen oder auch so verbogen werden, dass nur Aenderungen in der Anordnung der Moleküle stattfinden, wodurch ein Theil der Arbeit des sich bewegenden Körpers zu sogenannter Disgregationsarbeit verwendet wird, sich also verwandelt in Spannkraft. Dies wird besonders zu Anfang der Bewegung stattfinden und später werden die Oberflächen sich gegenseitig so accomodiren, dass diese Veränderungen beinahe verschwinden, wie es wohl auch ist, wenn sich Flüssigkeiten an festen Körpern oder unter einander reiben, dafür aber wird nun meistens zunächst Elektricität hervorgebracht, von der wir vorläufig absehen, da sie später besonders betrachtet werden soll, dann wird ein Theil der Arbeit verbraucht zu Schwingungsänderungen, wodurch Wärme entsteht. Durch Letzteres haben wir die wichtigste Erscheinung bei der Reibung berührt. Wenn wir nun die Voraussetzung eines Wärmestoffes, die es unerklärt lässt, wie wir die Quantität der Wärme absolut vermehren können, verlassen und annehmen, dass die Wärme aufzufassen ist als eine Bewegung und zwar der kleinsten Theilchen der Körper oder der zu ihrer Constitution beitragenden Aethertheilchen, so ist damit zunächst wieder angegeben, dass die Arbeit eines Körpers sich in Bewegung umwandelt.

Um nun aber in Bezug hierauf über die Richtigkeit unseres Gesetzes zu entscheiden, bedarf es noch einer doppelten Untersuchung. Es ist nämlich erstens zu erforschen, ob die Menge der Wärme, welche durch das Verschwinden einer bestimmten lebendigen Kraft eines sich bewegenden Körpers unter Voraussetzung, dass Molekularmodificationen und Elektricitätserregung vermieden sind, erzeugt wird, immer dieselbe ist, und dann ob diese wieder eine mechanische Arbeit produciren könne, welche der ursprünglichen gleich ist.

Die Resultate dieser Forschung haben zu dem Satz geführt, welchen man als den ersten Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet und als dessen Begründer neben Colding, Joule, Hirn, Clapeyron, Holtzmann, Rankine, Thomson und anderen besonders Clausius zu nennen ist, während Mayer zuerst auf denselben aufmerksam gemacht hat. Der Satz nämlich lautet: In allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit entsteht, wird eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge verbraucht und umgekehrt kann durch Verbrauch einer ebenso grossen Arbeit dieselbe Wärmemenge erzeugt werden oder kurz: Wärme und Arbeit (Werk) sind äquivalent. Der eine Theil dieses Satzes ist schon vielfach bewiesen durch die Experimente, welche das sogenannte mechanische Wärmeäquivalent zu bestimmen suchen, welche also die schon von Mayer am Ende seiner berühmten Abhandlung den Physikern gestellte Aufgabe lösen: „Wir müssen ausfindig machen, wie hoch ein bestimmtes Gewicht über den Erdboden erhoben werden müsse, dass seine Fallkraft äquivalent sei der Erwärmung eines gleichen Gewichtes Wasser von 0° auf 1°C.“ Dasselbe gilt von dem entgegengesetzten Theil des Satzes, denn auch dessen Richtigkeit ist durch die umfassenden Versuche von Hirn und Regnault ausser Zweifel gesetzt. Hervorheben möchte ich noch, dass Hirn durch sinnreiche Versuche *(Theorie mécanique de la chaleur p. 58)* sogar den Theil der Arbeit, welcher in Disgregationsarbeit überging, zu bestimmen wusste.

Es sei mir noch erlaubt bei dieser Gelegenheit der Pflicht der Dankbarkeit zu genügen und einen Experimentator zu nennen, welcher zuerst durch sinnreiche Versuche in Bezug darauf einen Zahlenwerth zu erhalten suchte.

Rumford nämlich (1798) machte zuerst darauf aufmerksam, dass eine unbegrenzte Wärmemenge durch Bewegung erzeugt werden könne, indem er in dem Militärzeughause zu München durch Reiben eines stumpfen Stahlmeissels auf dem Boden eines Kanonenrohres Wasser zum Kochen brachte.

Vor Rumford aber ist schon die Wärme als eine Art von Bewegung hingestellt worden und zwar von Baco von Verulam 1620 im 20. *Apho.* des *Novum. org.* und von John Locke, welcher geradezu behauptet: „Die Wärme ist eine sehr lebhafte Bewegung der unwahrnehmbaren kleinsten Theile eines Gegenstandes, welche in uns diejenige Empfindung hervorruft, wegen deren wir den Gegenstand als warm bezeichnen. Was in unserer Empfindung als Wärme erscheint, ist also am Gegenstande selbst nur Bewegung.“ Auch Cartesius führt Licht- und Wärmeerscheinung auf Bewegungserscheinung zurück und Hooke definirt noch bestimmter die Wärme als eine innere Bewegung der kleinsten Theile eines Körpers. Aehnliche Vorstellungen hatten die Bernoulli. Schon Joh. Bernoulli spricht sich dahin aus, dass die Wärme auf der Erschütterung der kleinsten Theile beruhe, eine Ansicht, die Daniel Bernoulli in seiner Hydrodynamik genauer ausführt. Umfassende Untersuchungen dieser Theorie haben zu richtigen Erkenntnissen geführt namentlich im Bereiche der luftförmigen Körper und geben überall eine Bestätigung unseres Princips.

Es ist nicht uninteressant, dass durch eingehende Untersuchungen gerade der Satz von Carnot, in dem zum ersten Male die Beziehung zwischen Wärme und mechanischer Arbeit ausgesprochen worden ist, in seinem Wesen beibehalten und nur die Bemerkung, welche zu seiner Begründung dienen soll, fortgelassen werden muss. Der genannte französische Ingenieur behauptet nämlich *(Reflexions sur la puissance motrice du feu, et les machines propres à développer cette puissance 1824)*, dass, wenn Arbeit durch Wärme geleistet wird und nicht zugleich eine bleibende Veränderung in dem Zustande des wirksamen Körpers eintritt, eine gewisse Wärmemenge von einem warmen zu einem kalten Körper übergeht. Diese Uebertragung betrachtet er als die der hervorgebrachten Arbeit entsprechende Wärmeänderung. Er giebt aber dazu die Bemerkung, dass dabei keine Wärme verloren gehe, sondern

die Quantität derselben unverändert bleibe, und begründet dies folgendermassen: „Diese Thatsache ist nie bezweifelt worden, sie ist ohne Untersuchung angenommen und dann in vielen Fällen durch calorimetrische Versuche bestätigt. Sie zu verneinen würde heissen, die ganze Theorie der Wärme, in welcher sie der Hauptgrundsatz ist, umstossen.“ Diesem letzteren Satz gegenüber heisst es jetzt in der Wärmelehre neben dem schon erwähnten Grundsatz: Wenn durch Vermittelung irgend eines Körpers, der auf seinen Anfangszustand zurückkommt, in einem umkehrbaren Kreisprocesse Wärme in Arbeit umgewandelt wird, gleichzeitig eine andere Wärmemenge aus einem wärmeren zu einem kälteren Körper übergeführt werden muss, und dass das Verhältniss dieser beiden Wärmemengen gleich ist dem Quotienten aus der Temperaturdifferenz der beiden Wärmequellen, zwischen denen der Wärmeübergang stattgefunden hat, und der absoluten Temperatur der Wärmequelle, welche die niedrigste Temperatur besitzt.

Die eben angestellte Betrachtung über Reibung führt uns sofort auf ein Gebiet, welches scheinbar der Mechanik sehr fern liegt, nämlich zu einer Untersuchung der physischen Naturkräfte und deren gegenseitiger Verwandlung, die nach unserem Principe ohne Verlust stattfinden muss, so dass in demselben Maasse ein Agens verschwindet, als einem anderen das Dasein gegeben wird.

Wir haben schon zu bemerken Gelegenheit gehabt, wie durch Reiben Elektricität erzeugt wird. Bekanntlich giebt es Apparate, die so eingerichtet sind, dass diese Uebertragung der Reibung bei mechanisch bewirkter Bewegung der alleinige Zweck ist, ich meine die gewöhnlichen Elektrisirmaschinen. Wenn wir nun bei dem Arbeiten mit einem solchen Apparate von der unvermeidlichen Wärmeerregung, Volumenvermehrung und der dabei stattfindenden Fortschiebung der Luft absehen, so muss die gewonnene Elektricität entweder als eine der beim Drehen des Elektricitätserregers verwendeten Arbeit äquivalente Spannkraft beobachtet werden können, oder sie muss sich als lebendige Kraft nachweisen lassen. Beides lässt sich zeigen; denn erstens befindet sich die auf dem Conductor angesammelte Elektricität nach dem schon stets recipirten Ausdruck in Spannung, die sofort wiederum in lebendige Kraft umgesetzt werden kann,

nämlich in Erschütterungen eines elektrischen Schlages oder in Arbeit durch Anziehung und Abstossung in der Nähe sich befindender Körper. Die hier nur kurz angedeuteten Erscheinungen leitet man bekanntlich aus der Annahme zweier elektrischen Fluida ab, die mit anziehenden und abstossenden im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung stehenden Kräften wirken. Da nun dieses Gesetz durch die Erfahrung als bestätigt angenommen ist, wenn es auch nur noch provisorische Geltung haben kann, so muss das Princip der Erhaltung der Kraft hier eben so sicher gelten wie bei der Gravitation.

In Bezug darauf ist ein interessanter Apparat das sogenannte elektrische Glockenspiel; denn hierdurch zeigt sich deutlich der Uebergang in Arbeit, indem das Pendel gehoben wird. Das gehobene Pendel giebt nun einen Theil seiner lebendigen Kraft ab an die Massentheilchen der einen Glocke, während der andere Theil sich in Spannkraft des gehobenen Pendels verwandelt. Letztere vereinigt sich mit einem Theil der Spannkraft der Elektricität und geht wiederum in lebendige Kraft über, indem das Pendel herabfällt und die Massentheilchen einer anderen Glocke in Schwingungen versetzt, die sich der umgebenden Luft mittheilen, und so fort, bis sämmtliche Spannkraft der Electricität verbraucht ist zu Schwingungen der Luft.

Dann aber kann auch die durch Reibung gewonnene Elektricität sofort zum Strömen gebracht werden durch einen sogenannten Leiter, so dass sich die Elektricität in lebendige Kraft umsetzt, deren Wirkung wir im Stande sind, zu beobachten. Die in einem sogenannten Leiter strömende Elektricität müssen wir uns also denken, um die mechanischen Grundsätze anwenden zu können, als verursacht durch eine Bewegung der den Leiter constituirenden Massentheilchen, welche nun bei günstigen Bedingungen, welche durch den im Stromträger vorhandenen Leitungswiderstand gegeben sind, neben mancherlei mechanischen Wirkungen Wärme nnd auch Licht hervorbringt.

Es ist nicht zu verkennen, dass wir uns hier auf einem in seinem letzten Wesen unergründeten Felde befinden; denn wir müssen einestheils noch festhalten an der provisorischen Erklärung der elektrischen Fluida, denen wir ebenso wie der

Materie Trägheit zuschreiben möchten, um ihnen lebendige Kraft zu ertheilen, zum anderen Theil aber müssen wir zu materiellen Massen übergehen.

Ich erwähne sogleich, dass neben der Uebertragung der Elektricität in Wärme und Licht noch eine Verwandlung, welche unten weiter erörtert werden soll, stattfindet; nämlich in solche Arbeit, welche chemisch zusammengesetzte Stoffe in ihre Bestandtheile zerlegt, also Massen von einander trennt. Auch kann sie, um ein Stück Eisen geleitet, Magnetismus erregen, also zu einer Spannkraft werden, welche Eisen bewegen, also Arbeit erzeugen kann. „Alle diese Erscheinungen bieten", wie Clausius (Abhandl. X p. 98) sagt, „schon an sich ein grosses Interesse dar, welches durch die praktischen Anwendungen, die man von ihnen gemacht hat oder möglicher Weise machen kann, noch bedeutend erhöht wird; dazu kommt noch, dass gerade diese Wirkungen einer streng mathematischen Behandlung fähig sind, und daher zu einer Untersuchung ihres inneren Zusammenhanges unter sich und mit der wirkenden Ursache besonders geeignet erscheinen".

Hierher passen die Erörterungen, welche Helmholtz über die von geladenen Conductoren überströmende Elektricität angestellt hat. Es hat nämlich derselbe, ausgehend von dem Princip der Erhaltung der Kraft, die Grösse der bei der Entladung einer elektrischen Batterie entwickelten Wärme berechnet und dadurch eine Formel gefunden, welche mit den von Ries mit grosser Sorgfalt und Umsicht angestellten Experimenten übereinstimmt. Es ist nämlich nach Helmholtz bei einer Batterie, deren äusseres Beleg abgeleitet ist, die bei der Entladung durch einen Leiter, in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Bewegung verschwindend klein ist gegen die Geschwindigkeit, womit sich die Elektricität in den Körpern bewegt, die gewonnene Wärme gefunden durch die Formel

$$\frac{1}{2A}\,\frac{Q^2}{S},$$

wo Q die Menge der Elektricität, S die Ableitungsgrösse des äusseren Beleges, eine Grösse, die freilich einer näheren Bestimmung bedarf, A das mechanische Aequivalent der

Wärmeeinheit bedeutet, während in Uebereinstimmung damit Ries sagt, die Wärmeentwickelung ist proportional

$$\frac{Q^2}{S},$$

wo S die Oberfläche der Belegung der Flaschen bedeutet, der die Grösse S bei Helmholtz proportional ist. Diese Entwickelung zeigt deutlich, wie das Princip der Erhaltung der Kraft ein Fundament zu weiteren Entdeckungen werden kann.

Es mag hier das allgemeine Gesetz erwähnt werden, welches aus seinen Versuchen Vorselmann de Heer (Pogg., XLVIII p. 292, 320) und aus eigenen Knochenhauer (Pogg., XLII p. 364, XLIV p. 64) schliesst, dass die Wärmeentwickelung bei derselben Ladung derselben Batterie dieselbe bleibe, wie auch der Schliessungsdraht abgeändert werden möge. Dies wäre erklärt, wenn man die elektrische Entladung im Schliessungsbogen nicht betrachtet als eine einfache Bewegung der Elektricität in einer Richtung, sondern als eine Reihe von Oscillationen zwischen den beiden Belegen, welche immer kleiner werden, bis die ganze lebendige Kraft derselben durch die Summen der Widerstände vernichtet und dadurch in andere Kräfte verwandelt ist, eine Annahme, welche von Thomson und Kirchhoff theoretisch abgeleitet worden ist. Dadurch ist zugleich der Erklärungsgrund für manche Erscheinungen bei der Entladung gegeben. Es ist nämlich durch Wollaston nachgewiesen, dass die Wasserzersetzung der Entladung so vor sich geht, dass an beiden Elektroden zugleich Sauerstoff und Wasserstoff auftreten, ferner bemerkt man abwechselnd entgegengesetzte magnetisirende Wirkungen. Bestätigt ist diese Annahme durch die Beobachtung von Oettingen, dass die Rückstände in einer Batterie bald positiv, bald negativ sind. Endlich kann man auch dabei auftretende eigenthümliche Lichterscheinungen, deren Beschreibung zu weit abführen würde, dadurch erklären. Wenn nun auch Clausius (Abhandl. X p. 114) ausführlich erläutert, dass das Gesetz der unveränderten Wärmeentwickelung in dem Schliessungsbogen nicht genau richtig ist, so dürfte gerade diese Entwickelung einen Beleg für die Richtigkeit unseres Principes liefern; denn die Abweichungen von dem Gesetze

werden hervorgebracht dadurch, dass neben der Wärmeentwickelung im Schliessungsdraht auch mechanische Arbeit erzeugt wird und diese für verschiedene Arten der Schliessung auch verschieden ausfallen muss, so dass sie von kleinen kaum merkbaren Einwirkungen bis zum vollständigen Zerstäuben des Leiters variiren kann. Es heisst in Bezug darauf bei Clausius p. 115 in der Abhandlung, welche ebenso das hier behandelte Princip bestätigt, als auch ihrem Zwecke entsprechend die mechanische Theorie der Wärme begründet: „Es ist nämlich im Voraus klar, dass der Arbeitsverbrauch von dem Widerstande, welchen die nichtleitende Schicht der Durchbrechung entgegensetzt, abhängt und dass er daher bedeutender sein wird, wenn die Enden des Schliessungsbogens durch einen nichtleitenden festen Körper getrennt sind, als wenn sich bloss Luft zwischen ihnen befindet. Daraus folgt, dass im ersteren Falle ein an einer anderen Stelle des Schliessungsbogens befindliches elektrisches Luftthermometer weniger erwärmt werden muss, als im letzteren, und so hat es sich auch bei einer von Ries (Pogg., XLIII p. 82) ausgeführten Versuchsreihe in der That ergeben.“ Gleichzeitig bietet dann aber auch die von Helmholtz gefundene Formel einen Weg, wie durch Experimente das Princip geprüft werden kann, indem der oben citirte Ausdruck für die durch die Entladung entwickelte Würme eine Constante enthält, welche eine experimentelle Prüfung des mechanischen Aequivalentes bietet.

Schon seit langer Zeit ist kein Zweifel mehr über die Hypothese, dass das Licht bestehe in Schwingungen eines hypothetisch genommenen Stoffes, des Aethers. Die Anzahl der Schwingungen, welche stattfinden müssen, um Licht zu erzeugen, hat man auf verschiedene Weise bestimmt. So wird klar, wie eine Arbeit, welche einen Körper erwärmt, denselben endlich zum Leuchten bringen kann. Je höher nämlich die Temperatur steigt, desto schneller muss ein Theil der Moleküle des Körpers schwingen, und verursachen die Schwingungen eine Temperatur von 500°, so führen die Beobachtungen zu einer Schwingungszahl von 400 Billionen, dann aber fangen die Körper an zu leuchten und zwar im rothen Lichte. Steigt die Temperatur noch höher, so entstehen auch noch Schwingungen von grösseren Schwingungs-

zahlen, ohne dass die mit geringeren Schwingungszahlen verschwinden. Weissglühende Körper von 1000 — 2000° strahlen eine unendliche Anzahl von Strahlen verschiedener Schwingungszahlen aus.

Während nun die Interferenz der oscillirenden Bewegungen von festen und beiden Arten flüssiger Körper keine Schwierigkeiten bietet, müssen wir die Unzulänglichkeit unseres Wissens in Bezug auf die Absorption, sei es der Schall-, Licht- oder Wärmeschwingungen, zugestehen. Es erfordern alle hier zu erwähnenden Erscheinungen, wie Phosphorescenz, Uebergang von Licht in chemische Wirkungen und dergleichen, eine eingehende Experimentaluntersuchung, um durch genaues Messen zu finden, ob das Absorbirte äquivalent mit dem ist, was in anderer Form abgegeben wird.

Auf die Elektricität, welche entsteht bei der Berührung chemisch verschiedener Körper, muss sich unser Princip auch anwenden lassen. In Bezug darauf haben wir zwei Klassen von Leitern zu unterscheiden: 1) diejenigen, welche nach Art der Metalle leiten und dem Gesetz der galvanischen Spannungsreihe folgen; 2) diejenigen, welche diesem Gesetze nicht folgen.

Eine Schwierigkeit bietet die Erscheinung der Spannungselektricität, welche sich beim Contact der Metalle, die nicht durch einen flüssigen Leiter geschlossen sind, zeigt, und wir müssen, um dieselbe zu erklären, ohne uns in einen Widerspruch gegen unser Princip zu verwickeln, die Voraussetzung machen, dass chemisch verschiedene Substanzen gegen die beiden Elektricitäten verschiedene Anziehungskräfte haben, und zwar dass diese Kräfte nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirken, während die Elektricitäten auf einander es auch in grösseren thun. „Die Contactkraft würde danach (Helmholtz, p. 47) in der Differenz der Anziehungskräfte bestehen, welche die der Berührungsstelle zunächst liegenden Metalltheilchen auf die Elektricitäten dieser Stelle ausüben, und das elektrische Gleichgewicht eintreten, wenn ein elektrisches Theilchen, welches von dem einen zum andern übergeht, nichts mehr an lebendiger Kraft verliert oder gewinnt.“ Die dabei auftretenden Schwierigkeiten sind die Ursache, dass man geneigt ist, die ganze Hypothese über die Contactelektricität aufzugeben und dafür die Elektricität

nur in einer chemischen Wirkung zu suchen. Die Gründe für und gegen die eine und die andere der Hypothesen anzugeben und zu erörtern, überschreitet die Grenzen dieser Arbeit. Wenn mehrere Metalle einen geschlossenen Kreis bilden, so kann kein Strom entstehen, sondern es bildet sich nach dem Contacte ein neuer elektrischer Gleichgewichtszustand an den Grenzen der verschiedenen Metalle und die bei den auf einander übergehenden elektrischen Elementen erregte Spannung, deren Existenz durch elektroskopische Versuche hinlänglich erwiesen ist, muss dann gleich sein der infolge der Anziehung verbrauchten lebendigen Kraft. Wird der Kreis durchschnitten, so können an den Enden freie Elektricitäten auftreten, deren Dichtigkeit aber durch die verschiedenen Anziehungen der Metalle auf die verschiedenen Elektricitäten bedingt wird. Die beim Trennen im Contact gewesener Metalle zu beobachtende Spannung muss nun, wie beim Elektrophor, entsprechen der mechanischen Arbeit beim Trennen, welche aber in Folge der Elektricität grösser sein muss, als sie ohne diese nur zur Ueberwindung der sogenannten Molekularkräfte nöthig gewesen wäre. Nur erwähnen will ich einen Umstand, auf den Wittwer (die Molekulargesetze, p. 149) aufmerksam macht: „Die verschiedenen Körper haben wegen ihrer abweichenden Dichtigkeit verschiedene Schwingungszahlen. Wenn auch dieser Umstand wenig Schwierigkeiten bietet, so lange man im Innern eines Körpers bleibt, so ändert sich doch die Sachlage, wenn man die Grenzen zweier Körper berücksichtigt. Könnten hier nicht elektrische Erscheinungen auftreten? Es würden so manche bisher unerklärte Erscheinungen, wie z. B. die bei der Berührung der Körper auftretende elektrische Spannung, die Thermoelektricität, die Luftelektricität u. s. w., eine Erklärung finden.“

Wird aber in den Kreis verschiedener Metalle ein Elektrolyt eingeschaltet, so entsteht ein Strom, da sich dann der oben vorausgesetzte elektrische Gleichgewichtszustand nicht herstellen kann, und zwar, weil die Bestandtheile des eingeschaltenen zusammengesetzten Stoffes den Anziehungen und Abstossungen nachgeben und infolge dessen ausgeschieden werden. Es entsteht also ein Strom eben durch diese

elektrolytische Action. Nach unserem Principe muss demnach die bei einem constanten Strom gewonnene Arbeit gleich sein der Wirkung der Verbrennung eines im Stromerreger vorhandenen Körpers, wobei aber selbstverständlich hier nur der Ueberschuss gemeint sein kann, der übrig bleibt, wenn die gleichzeitig in der Kette stattfindende Reduction abgezogen wird, da, so lange der Strom constant ist und jede Polarisation vermieden ist, Nichts geändert wird, als die chemischen Verhältnisse und die gewonnene Arbeit.

Die in dem Strome vorhandene Kraft kann nun auf mehrfache Art umgewandelt werden und zwar zunächst in Wärme, die nach dem Obigen mit Lichterscheinung verbunden sein kann. Dabei findet Helmholtz mit zu Grundelegung der Formel für die gewonnene Wärme von Lenz nach dem Princip der Erhaltung der Kraft, dass die chemische Wärme gleich der elektrischen sei, wenn die elektromotorischen Kräfte zweier so combinirten Metalle dem Unterschied der bei ihrer Verbrennung und Verbindung mit Säuren zu entwickelnden Wärme proportional wären. Letztere Bedingung ist aber bestätigt durch Messungen von Poggendorf (Annalen LIV 429 und LVII 104) an Ketten, bei denen dieselben chemischen Processe stattfinden. Auch über diese Art der strömenden Elektricität hat Clausius (Abhandl. XL) eine sorgfältige Betrachtung angestellt und gefunden, dass bei einem constanten Strom, der keine andere, als eine Wärmewirkung hervorbringt, diese übereinstimmt mit den von Joule, Lenz und Becquerel durch das Experiment bestimmten Gesetzen.

Es kann aber auch der galvanische Strom chemische Arbeit leisten, indem man denselben durch eine Zersetzungszelle leitet, in der er z. B. Wasser zersetzen kann. Hier wird der Strom geschwächt; denn ein Theil desselben wird verwendet zu chemischer Arbeit, indem er das vorhandene Hinderniss der Affinität überwindet. Diese in Spannkraft übergegangene Wirkung des Stromes kann wiederum zum Hervorbringen eines Stromes gezwungen werden, wenn man die erregenden Elemente entfernt und die früheren Pole unter sich verbindet. In der eben angegebenen Wirkung des Stromes ist der Grund angegeben, warum man die Voltameter beim Gebrauch des Stromes nicht verwenden kann

zum Strommessen. Diese Bemerkung verdient überhaupt bei jedem Messapparat des Stromes Berücksichtigung.

Endlich kann auch ein galvanischer Strom direct mechanische Arbeit verrichten und dabei vernichtet werden.

Dass auch umgekehrt durch Wärme Elektricität hervorgebracht werden kann, ist schon lange bekannt. Im Jahre 1703 brachten die Holländer von Ceylon einen Edelstein, den Turmalin, nach Europa, der in heisse Asche gelegt, dahin gelangt, leichte Körper anzuziehen und wieder abzustossen. Lemery zeigte zuerst 1717 in einer Sitzung der k. Academie der Wissensch. zu Paris einen solchen Stein vor. Aepinus lehrte 1756 die näheren Eigenschaften dieses Körpers kennen. Es ist aber noch zu folgern, dass die Elektricität aus Wärme entstehe. 1821 entdeckte in Bezug darauf Seebeck die thermoelektrischen Ströme und Peltier hat den wechselsweisen Uebergang experimentell nachgewiesen.

Bei Strömen von grosser Intensität lässt sich eine interessante hierher gehörige Erscheinung hervorbringen, die recht deutlich zeigt, dass nicht nur Elektricität in Wärmewirkung übergeht, sondern auch, dass das Umgekehrte stattfinden kann. Der hier gemeinte Versuch ist der, welchen zuerst Children (Gilb, Ann. 52, 353), dann H. Davy (Gilb, Ann. 71, 260) angestellt hat und den Larive (Pogg., 15, 261) wiederholt und mannigfaltig umgeändert hat. Wenn man einen kräftigen Strom durch einen Draht schliesst, der aus gleich langen und gleich dicken Drahtstücken aus Platin und Silber besteht, so werden alle Platinstücke gleichmässig glühend, die Silberstücke aber nicht erhitzt. Diese Resultate scheinen nur zu verstehen möglich, da sie nicht erklärt werden können durch die verschiedenen sogenannten Wärmecapacitäten der gebrauchten Metalle, wenn man annimmt, dass bei Uebertritt des Stromes aus Silber in Platin ein Theil der Elektricität in Wärme umgewandelt wird und umgekehrt beim Uebertritt aus Platin in Silber ein ebenso grosser Theil von Wärme in Elektricität verwandelt wird. Dabei bleibt freilich im gegenwärtigen Stadium unseres Wissens noch unbekannt, worin der Verlauf der Agentien bei dieser Umwandlung besteht und auch die dabei stattfindende Verwandlung in Licht. Ueber dieses Experiment sind Betrachtungen an-

gestellt von Freih. von Baumgartner (Sitzungsb. d. kaiserl. Acad. Wien XXII p. 513 und XXXII p. 157). In der zweiten der eben angegebenen Abhandlungen werden die gegen die erste von Müller vorgebrachten Bedenken einer Erörterung unterzogen mit Hinweis auf die treibende freie Elektricität auf Leitern, die sich nach den Rechnungen von Kirchhoff auf der Oberfläche verhalten muss, damit immer durch jeden Querschnitt des Leiters die gleiche Menge von Elektricität hindurchgehe.

Die thermoelektrischen Ströme, welche demnach einen deutlichen Beweis für die Transformation der Kräfte liefern, erfordern aber noch eine ausführliche Betrachtung, um auch die Verwandlung nach gleichen Aequivalenzverhältnissen zu bestätigen. Auch den Erscheinungen bei diesen Strömen hat Clausius eine Abhandlung (Abhandl. XII) gewidmet und in derselben auch die Helmholtz'sche Ansicht über die Contactelektricität insofern erweitert, als er ausser der von demselben angenommenen Differenz der Anziehungskräfte für die verschiedenen Elektricitäten noch zur Erhaltuung der elektrischen Differenz an der Berührungsstelle die Wärme als Agens hinzunimmt. Es kann nicht in unserer Absicht liegen, die Abhandlung weiter zu verfolgen, nur so viel ist für uns wichtig, dass, wie auch von anderen Theoretikern angegeben ist, das Carnot'sche Gesetz auf die thermoelektrischen Erscheinungen Anwendung findet; denn dadurch ist dann rückwärts auch der Zusammenhang mit unserem Principe gegeben.

Wir kennen ferner magnetische Kraft, die wir uns an manchen Körpern haftend denken. Diese tritt als Spannkraft auf und kann übergehen in eine andere durch Leistung einer Arbeit, indem sie andere Körper anzieht und abstösst. Nach einer oberflächlichen Betrachtung könnte man trotzdem, dass also hier anziehende Kräfte vorhanden sind, geneigt sein, einen Magnet als einen Kraftvorrath zu betrachten, der ohne Ende Arbeit zu leisten im Stande ist, indem er stets von Neuem bereit ist, einen Körper zu heben und ihn wieder fallen zu lassen, wenn er aus dem Wirkungskreis desselben entfernt wird. Ein Vergleich dieser Kraft mit der Gravitation wird uns aber von der Nichtigkeit dieser Annahme überzeugen.

Schwierigkeiten bieten alle elektrodynamischen Erscheinungen. In Bezug darauf ist uns von Wilhelm Weber in seinen elektrodynamischen Maassbestimmungen 1846 ein Kraftgesetz gegeben, nach dem die gegenseitigen Einwirkungen der elektrischen Massen nicht blos von ihrer Entfernung beeinflusst werden. Wenn nun Weber (Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie, 1871) nachweist, dass dieses von ihm aufgestellte Gesetz nicht nur nicht dem Principe der Erhaltung der Kraft widerspricht, sondern demselben eine allgemeinere Fassung verleiht, wenn ferner Weber findet, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz in der allgemeinen Form seines Gesetzes mit inbegriffen ist, also hiermit jede im Obigen (p. 55) angedeutete provisorische Definition von elektrischen Massen aufgegeben wird, so werden wir gezwungen, von da aus auf die Postulate, die als Ausgangspunkte angegeben sind, zurückzuschliessen. Es ist also dadurch eine Untersuchung gefordert, welche über unseren Standpunkt hinausgeht.

Zur Verdeutlichung unseres Principes scheinen mir vor Allem geeignet die Apparate, durch die wir im Stande sind, die mechanische Wirkung des galvanischen Stromes umzukehren, sodass wir einen Strom erzeugen können durch Aufwand von mechanischer Arbeit. Wir haben Apparate, bei denen dadurch, dass ein galvanischer Strom in Verbindung mit einem anderen oder mit einem Magneten gebracht ist, eine mechanische Bewegung hervorgebracht wird, und können nun umgekehrt, indem wir die betreffende Rotation durch mechanische Arbeit erzeugen, einen galvanischen Strom hervorbringen. Ich erinnere an die Hervorbringung der sogenannten unipolaren Induction, über welche Lenz (Pogg., Ann. 31, 483) folgendes Gesetz aufgestellt hat: „Wenn sich ein geschlossener metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stromleiters oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein Strom von solcher Richtung inducirt, dass er dem ruhenden Drahte einen Bewegungsantrieb ertheilt haben würde, der die entgegengesetzte Richtung von der dem Drahte wirklich gegebenen Bewegung hätte, vorausgesetzt, dass der Draht nur in der Richtung der Bewegung selbst und in der entgegengesetzten beweglich wäre."

Recht deutlich ist dieser Uebergang dargelegt in den Abhandlungen von Siemens und Wheatstone, welche der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in London übergeben sind, und durch schon construirte Apparate von Wilde, in denen die Elektromotoren, welche dazu dienen, mit Hilfe eines galvanischen Stromes einen mechanischen Effect hervorzubringen, geradezu umgekehrt werden, so dass durch Aufwand von mechanischer Arbeit ein Strom erzeugt wird. Das „Athenäum" berichtet über eine Probe, welche mit einem grossen Wilde'schen Apparate am 2. März 1867 in Burlington House in London vor wissenschaftlichen Notabilitäten angestellt wurde. Dort wurde mit Hilfe einer Dampfmaschine von 15 Pferdekräften ein galvanischer Strom erzeugt, welcher hinreichte, ein stark glänzendes elektrisches Licht hervorzubringen.

Von gleichem Interesse ist die Erzeugung eines Inductionsstromes durch Anbringung von Drahtgewinden an dem eisernen Schwungrad einer Dampfmaschine *(Lamy, Compt. rend. XIV p. 807).*

Wenn nun auch in dem Obigen an vielen Beispielen angegeben ist, wie die Naturkräfte in einander übergehen und die eine entsteht durch den Verbrauch einer anderen, wenn auch in vielen Fällen sich die entgegengesetzte Verwandlung hervorbringen lässt, wenn wir uns also schon der freudigen Hoffnung hingeben dürfen, dass unser Princip eine richtige Hypothesis enthält, obgleich manche Erscheinungen, wie z. B. die Erzeugung eines permanenten Magneten durch einen anderen, noch dunkel sind, so bleibt doch immer noch die schwierige Aufgabe, bei den meisten Erscheinungen genau zu untersuchen, ob diese Verwandlung immer nach bestimmten Aequivalenzverhältnissen geschieht, um unserem Principe volle Anerkennung zu verschaffen. Auch wird es noch nöthig sein, die Art der Bewegung bei den einzelnen Erscheinungen zu fixiren, so dass die einzelnen Naturkräfte nur erscheinen als verschiedene Modificationen der Bewegung von unveränderlichen Massen und Massentheilchen.

Es bestimmt sich also, wenn wir bei den im Obigen gegebenen Postulaten stehen bleiben können, die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften dahin, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende und

abstossende Kräfte, deren Intensität von der Entfernung abhängt. „Ihr Geschäft wird (Helmholtz p. 7) vollendet sein, wenn einmal die Zurückleitung der Erscheinungen auf einfache Kräfte vollendet ist, und zugleich nachgewiesen werden kann, dass die gegebene die einzig mögliche Zurückleitung sei, welche die Erscheinungen zulassen, dann wäre dieselbe als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselben alsdann also auch objective Wahrheit zuzuschreiben sein."

Somit scheint es nun gerechtfertigt zu sein, dass ich dieses Princip unmittelbar den Grundsätzen oder genauer den Grundhypothesen habe folgen lassen; denn ich hoffe dargethan zu haben, dass dasselbe aus den Postulaten mit Hilfe der für die Naturforschung nöthigen Hypothese gefolgert werden kann.

Es mag auch erwähnt werden, dass das Princip den Weg angiebt, der uns zur Ergründung des Wesens der Naturkräfte führt. Ja, es lässt sich sogar mit Hilfe unseres Satzes ein Rückschluss machen auf andere als Grundhypothesen hingestellte Sätze. So fordert derselbe mit grosser Evidenz die Verneinung aller rotirenden Kräfte, wie sie Grassmann zur Erklärung elektrodynamischer Erscheinungen annimmt. Diese Behauptung ist von Wundt p. 135 begründet, indem er nachweist, dass die Annahme rotirender Kräfte gegen den Satz von dem Beharren der Wirkung spricht. Nehmen wir rotirende Kräfte an, so dass also z B. ein Körper infolge dessen um einen anderen, von dem die Kraft ausgehe, sich bewege, so würden wir zu folgender dem Satz vom Beharren der Wirkung widersprechender Erscheinung gelangen können. Wenn dem sich bewegenden Körper andere Körper sich entgegenstellen, so werden diese in der Richtung der Tangente fortgeschleudert, er aber wird diese beim Stosse verlorene lebendige Kraft wieder ersetzt erhalten. Ein solches System könnte also ins Unbegrenzte aus sich heraus Kraft erzeugen und nach aussen abgeben.

Diesem eben Erörterten gegenüber erscheint es paradox, wenn man behauptet, wie man es in einer theoretischen Bewegungslehre thun kann, dass es eigentlich nur Eine einfache Bewegung giebt und diese ist die Rotation, indem diese in eine Translation übergeht, sobald die Rotationsaxe

ins Unendliche rückt. Hierdurch wird es recht klar, dass ein wesentlicher Unterschied stattfindet zwischen der theoretischen Mechanik und ihrer Anwendung auf physische Körper und deren Bewegung.

Ich habe ferner nachgewiesen, wie viel dazu nöthig ist, um unserem Principe eine zur Anwendung schickliche mathematische Form zu geben und dass dasselbe auch in der Erfahrung schon Bestätigung gefunden hat, wenn auch die volle noch nicht erreicht ist, so dass es dadurch wiederum klar ist, dass der Satz nicht Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache ist.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Dieses Princip ist hervorgegangen aus den übereinstimmenden Gesetzen über das Gleichgewicht an den einfachen Maschinen. Man fand an dem Hebel, der Rolle, den Rollenzügen und an der schiefen Ebene, dass überall im Falle des Gleichgewichtes die Kräfte sich bei einer anderswoher verursachten Bewegung verhalten umgekehrt wie die Wege ihrer Angriffspunkte und stellte darnach das allgemeine Gesetz auf. Es erscheint also dasselbe als ein Ausdruck einer allgemein gültigen Thatsache, als ein mit Hilfe einer unvollständigen Induction gefundener Satz, so dass es einer Deduction bedürftig ist.

Anders aber muss man über das Princip urtheilen, wenn einmal der Satz von der Constanz der Kraft zugegeben wird, es lässt sich dann dasselbe aus den Fundamentalhypothesen folgern. Wir kommen darauf zurück bei dem Princip von der lebendigen Kraft. Es sind nämlich Kräfte, welche an einem Körpersystem wirken, dann unter einander im Gleichgewichte, wenn sie keine Aenderung der Bewegung oder des Geschwindigkeitszustandes hervorbringen, wenn also dieselben die lebendigen Kräfte des ganzen Systemes und auch der Massenelemente nicht verändern, gleichgültig ob das Massensystem in Ruhe oder Bewegung ist, und umgekehrt. Nach dem Principe der Erhaltung der Kraft ist aber das nur möglich, wenn die Gesammtmenge der vorhandenen Spannkräfte unverändert bleibt, wenn also weder ein Theil noch die ganze Menge derselben sich umsetzt in lebendige Kraft. Die allgemeinste hier gefolgerte Gleichgewichtsbedingung ist also diese, dass ein Verbrauch von Spannkraft nicht vorhanden sein darf, also Arbeit nicht ausgeübt wird.

Soweit ist die Gleichgewichtsbedingung eine rein logische Consequenz aus dem Vorigen, und aus der mathematischen Form desselben muss demnach auch die unseres Princips

sich ergeben; die Aenderung der lebendigen Kraft ist nämlich dann gleich 0 zu setzen, es existirt demnach kein Spannkraftverbrauch, d. h. die Spannkräfte dürfen sich im Falle des Gleichgewichtes nicht ändern. Diese Formulirung würde sofort gegeben sein, wenn man ein Maass der Spannkräfte hätte. Wir wollen nun versuchen allen Schwierigkeiten, welche im Begriffe der Kraft enthalten sind, zu entgehen, Schwierigkeiten, welche wie es scheint, schon die Begründer der Mechanik veranlasst haben mit einer Art ängstlicher Scheu das Wort Kraft zu gebrauchen, welche auch noch D'Alembert bewogen haben, die Mechanik lediglich als eine Wissenschaft der Wirkungen zu behandeln und sich zu entschuldigen, dass er, um Umschreibungen zu vermeiden, dennoch häufig den dunkeln Ausdruck Kraft gebraucht habe. Wir erreichen dies, indem wir als Maass der Kräfte deren Wirkungen, oder wie wir diese nennen, deren Arbeit nehmen. Diese beurtheilen wir nach einer allgemein gültigen Erfahrungsthatsache, wie sie uns zunächst entgegentritt, wenn wir die Maschinen benutzen als Ersatz der Arbeit des Menschen oder der Thiere, durch das Product der statisch gemessenen Kraft mal dem von dem Angriffspunkte derselben zurückgelegten Weg; denn die Arbeit ist nicht allein der Kraft, sondern auch dem zurückgelegten Weg proportional. Es mag sogleich hier wegen einer weiter unten zu betrachtenden Bemerkung von Gauss über die allgemeine Gültigkeit des Princips erwähnt werden, dass es in der Natur Kräfte giebt, die nicht arbeiten, z. B. der gegenseitige normale Druck zwischen einem beweglichen und unbeweglichen Körper, wie die Spannung einer Schnur, an der eine Pendellinse befestigt ist. Da nun nach dem Obigen die Spannkräfte in ihrer Gesammtmenge sich nicht ändern sollen, so würde das nur heissen, dass die angebrachten Kräfte nicht Arbeit verrichten sollen. Da nun aber diese sich nur angeben lässt, wenn eine Bewegung stattfindet, so ertheilen wir diese dem Massensystem. Wir denken uns das System so fortbewegt, dass jeder Punkt eine unendlich kleine Linie beschreibt, die er wirklich zurücklegen kann. Eine solche gedachte Verschiebung nennt man eine virtuelle Verschiebung und die ihr entsprechende Arbeit virtuelle Arbeit. Die Bezeichnung „virtuell" (*virtus*, Fähigkeit, Möglichkeit)

soll ausdrücken, dass diese Verschiebungen nur als möglich gedacht werden, nicht wirklich erfolgende sind. Es wird also dann Gleichgewicht stattfinden, wenn die von einem Theile der Kräfte producirte virtuelle Arbeit der von dem noch übrigen Theil, welcher dann gewöhnlich Widerstand genannt wird, virtuell producirten Arbeit gleich aber entgegengesetzt ist.

Wenn nun auch der im Obigen gebrauchte Begriff der Arbeit ein Ausdruck einer allgemeinen Erfahrungsthatsache ist, so ist es doch anders bei dem der virtuellen Arbeit, der nur ein rein mathematischer Ausdruck ist, infolge dessen unserem allgemeinen Principe Beschränkungen auferlegt werden. Wir müssen nämlich den virtuellen Weg unendlich klein nehmen, denn sonst würde man im Allgemeinen nicht den Bedingungen des Systems und dem Wesen der angebrachten Kräfte genügen können. Wir berücksichtigen dadurch nur die sogenannte Tangentialbeschleunigung, welche dann passend bezeichnet wird tangentielle Elementarbeschleunigung. Wir nennen dann virtuelle Elementararbeit der tangentiellen Elementarbeschleunigung, kurz Elementararbeit der Beschleunigung, das Product der virtuellen Verschiebung in die tangentielle Elementarbeschleunigung, welches nach einer einfachen Transformation ist das Product der Elementarbeschleunigung in die Projection der virtuellen Verschiebung auf diese d. h. das virtuelle Moment. Wenn nun die Beschleunigung die Geschwindigkeit vergrössert, so wird diese Projection auf die Richtung der Kraft fallen und es wird dann die hervorgebrachte Arbeit nach Uebereinkunft positiv zu nehmen sein und im Gegentheil negativ.

Nicht ohne Absicht ist hervorgehoben worden, dass es nur ein Uebereinkommen ist, die eine Art der Arbeit die positive und die andere die negative zu nennen, da wir nur behaupten können, dass sie einander entgegen gesetzt sind. Es dürfte daher wohl geeigneter sein, wie Clausius (Abh. XII. p. 180) vorschlägt, den Unterschied der Arbeiten durch ein Verbum zu bezeichnen und die Arbeiten als gethane und erlittene zu unterscheiden, so dass also der Ausdruck, die Kraft erleidet eine Arbeit, so viel bedeutet als, „sie thut eine negative Arbeit“. Schell (Theoret. Mech.) bedient sich der Ausdrücke „bewegende und widerstehende Arbeit.“

Darin ist die grosse Vervollkommnung des Princips enthalten, welche Lagrange demselben durch Einführung der Variationen gegeben hat. Zugleich aber liegt auch in diesem mathematischen Ausdruck eine Beschränkung für die Anwendung des eigentlich ganz allgemeinen Princips auf die Fälle, in denen das System an gewisse Bedingungen gebunden ist, welche seine Beweglichkeit beschränken, und zwar an Bedingungen, die dann nöthigen zu einer Theilung der Kräfte, von denen der eine Theil Tangential-, der andere Normalbeschleunigung hervorbringt. Dass eine solche Beschränkung nicht in dem Princip enthalten ist, geht schon daraus hervor, dass es in vielen Fällen nicht nöthig ist, den Weg unendlich klein zu setzen und zwar in allen denen, wo die Richtung der Kraft mit dem Weg des Angriffspunktes derselben zusammenfällt, wie z. B. bei den Rollen und Rollenzügen.

Diese Bedingungen treten nun meistens auf in Form von Gleichungen, die nur einen Zusammenhang der Coordinaten der Massenpunkte enthalten, sich also beziehen auf die gegenseitigen Abstände derselben, so dass wir zu unterscheiden haben, ein unveränderliches oder veränderliches System. Diese Gleichungen geben auch Beschränkungen über die Orte einiger oder aller Punkte oder beides, oder umfassen Ortsbeschränkungen, die mit der Zeit veränderlich sind. Die zuletzt erwähnten Bedingungen müssen nun, obgleich wir zu unterscheiden haben zwischen Gleichgewicht der Ruhe und Bewegung, eigentlich unberücksichtigt bleiben, da es sich hier handelt um Untersuchungen, die sich auf einen bestimmten Zeitpunkt beziehen, so dass also die Zeit als constant zu betrachten wäre. Doch können wir von solchen Bedingungen der weiteren Verwendung des Princips wegen nicht absehen. Es können endlich auch die Bedingungen so gestaltet sein, dass selbst die Massen veränderlich sind mit dem Orte und der Zeit. In dem Falle also, z. B. wo die Punkte an gegebene Flächen gebunden sind, treten, wie Jacobi besonders hervorhebt, zur Bestimmung der Lage des Ortes, (vergleiche die Bemerkung Jacobi's citirt von Neumann Sitzungsber. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1869 p. 257), zwei heterogene Bedingungen zusammen, nämlich die Gleichung der gegebenen

Fläche und dann die angebrachten Kräfte, sofern dieselben den Punkt nicht auf der Fläche zu belassen streben.

Wenn nun das Princip eine logische Consequenz enthält, sobald nur von Kräften, die eine Arbeit dabei verrichten können, die Rede ist, liegt der Gedanke nahe, die Giltigkeit des Princips auch dann noch *a priori* festzuhalten, sobald man nämlich vermag die gegebenen Bedingungen als derartige Kräfte aufzufassen. Nach der allgemeinen Bestimmung aber über Kräfte, welche der Aufstellung des Princips der Erhaltung der Kraft zu Grunde liegt, muss man die gegebenen Bedingungen entweder als lebendige oder Spannkräfte denken und muss ebenso die Veränderung des Massensystemes deuten. Es ist also die Richtigkeit des Satzes allgemein anzuerkennen und es erfordert dann dessen mathematische Verwendbarkeit für ein bestimmtes Problem nur eine besondere Reduction der Bedingungen auf Kräfte.

Wie in solchen Fällen von der allgemeinen Gültigkeit des Princips abgewichen werden muss, hat Neumann (Sitz. d. Ges. d. Wiss. z. Leipzig 1869 p. 277) genauer erörtert in einer Abhandlung, die den Zweck hat eine strenge Deduction des Princips zu liefern, und es drückt sich derselbe folgendermassen darüber aus: „Wie wenig von einer absolut strengen Behandlung derartiger Probleme die Rede sein kann, zeigt sich deutlich, wenn wir etwa die Bewegung eines von der Schwerkraft sollicitirten Pendels oder überhaupt die Bewegung eines starren Körpers, auf den gegebene Kräfte einwirken, näher in's Auge fassen. Um eine solche Bewegung mit voller Genauigkeit zu untersuchen, müssten wir nothwendig zurückgehen auf diejenigen Molekularkräfte, welche hinter der sogenannten Starrheit des Körpers verborgen sind, in unsere Untersuchung als nothwendig mit hineinziehen jene kleinen Dilatationen und Contractionen, welche während der Bewegung des Körpers in seinem Innern stattfinden und welche im Verlaufe dieser Bewegung von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Vernachlässigen wir diese inneren Vorgänge, so verzichten wir zugleich auf die wirkliche strenge Behandlung des Problems."

Die Deduction von Neumann ist abhängig gemacht von den Fundamentalgleichungen, dass die beliebig gegebenen Kräfte zerlegt nach drei zu einander senkrechten Coordi-

naten gleich sind dem Producte aus Masse in die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des sich bewegenden Punktes nach der Zeit, und führt dann zu folgendem allgemeinen Satz: „Treten bei einem mechanischen Probleme irgend welche Bedingungsgleichungen auf, die entweder nur die Coordinaten enthalten, oder ausserdem auch noch mit der Zeit behaftet sind und können diese Gleichungen zufolge der physikalischen Bedeutung des Problems aufgefasst werden als ein Symbol für nicht näher bekannte Kräfte, von denen indessen vorausgesetzt werden darf, dass sie ein Potential besitzen, so wird der Satz der virtuellen Verückungen in Gültigkeit sein, nämlich zu bezeichnen sein als eine unmittelbare Consequenz des obengenannten Fundamentalgesetzes. — Denn wenn auch bei so mangelhafter Kenntniss der hinter den gegebenen Bedingungsgleichungen verborgenen Kräfte von einer völlig strengen Behandlung des vorgelegten Problems Abstand zu nehmen ist, so wird doch durch jenen Satz der virtuellen Verrückungen die Vorschrift ausgesprochen für diejenige approximative Behandlung des Problems, welche unter so bewandten Umständen und bei Anwendung des Fundamentalgesetzes von selber sich darbietet.“

Eine Deduction des Princips scheint nun überhaupt überflüssig zu sein, nach den obigen Erörterungen über Kräfte, als welche auch die gegebenen Bedingungen immer zu betrachten sind, da dann das Princip eine logische Folgerung enthält und die gelieferte Deduction nur einen mathematischen Ausdruck durch einen anderen rechtfertigt. Nichts desto weniger ist die gedachte Herleitung von Wichtigkeit, denn durch dieselbe ist bewiesen, dass der aus der Erfahrung hergeleitete Begriff der Arbeit nicht anderen Fundamenten widerspricht und damit seine volle Berechtigung erlangt.

Von Bedeutung für die Kritik unseres Princips ist die Eliminationsmethode bei den Bedingungen, welche ein unveränderliches System in seiner Beweglichkeit beschränken, eine Methode, welche Lagrange gelehrt hat und welche auf die Einführung von Multiplicatoren beruht; denn es ergiebt sich dann, dass diese in Verbindung mit den gegebenen Bedingungen Kräften entsprechen.

Nachdem wir nun oben dargelegt haben, dass unser Princip eine rein logische Consequenz enthält, so müssen wir behaupten, dass dasselbe nicht mathematisch bewiesen werden kann, so dass wir also der von Jacobi aufgestellten Ansicht, welche im ersten Theil der Arbeit citirt ist, insoweit beitreten, als es sich nicht um die mathematische Formulirung handelt.

Nach dem Obigen kann nun gesagt werden, dass auch umgekehrt die Anwendung dieses Princips, wenn es in seiner logisch gefolgerten Strenge genommen wird, ein Mittel ist, um über die Art der Kräfte zu entscheiden und also beitragen muss zur Kenntniss der Molekularkräfte und damit der Molekularbewegungen, die wir ja überhaupt nur auf indirectem Wege erlangen können.

In Bezug auf die Verwendbarkeit des Princips bei gegebenen Bedingungen ist noch zu erwähnen eine Bemerkung, welche Gauss bei Gelegenheit der Aufstellung seines Princips gemacht hat; denn dieselbe giebt auch zu erkennen, dass das Princip der virtuellen Verrückungen neben seiner allgemeinen Gültigkeit einen rein mathematischen Ausdruck besitzt, der seinen beschränkten Gebrauch bedingt. Es sagt nämlich Gauss *(Opera V. p. 27)* in einer Anmerkung: „Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedingungen voraus, dass die jeder Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B. dass ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, dass die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei und dergleichen. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen Punkt nicht auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm blos das Austreten auf die Eine Seite; ein nicht ausdehnbarer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht nur die Zunahme nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollen wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, dass es alle Fälle umfasst? Der allgemeine Ausdruck ist dann, dass die Summe der virtuellen Momente niemals positiv werden kann.“

Diese Bemerkung ist nun gewiss, wie es von dem grossen Gauss nicht anders zu erwarten ist, richtig, bezieht sich aber eben nur auf den mathematischen Ausdruck des Princips, wie schon aus der oben gemachten Bemerkung hervorgeht, dass die Art der Vorzeichen Nichts mit dem Wesen der Kraft zu thun hat, sondern nach Uebereinkommen gewählt ist. Vom Standpunkte des allgemeinen Princips kann gegen diese Bemerkung eingehalten werden, dass man dann, wenn man den materiellen Punkt von der Oberfläche entfernt, auf der er sich bewegen soll, das ganze System anderen Kräften aussetzt; denn man entfernt den Widerstand, der als äussere Kraft eingeführt werden muss und auch eine virtuelle Arbeit leisten würde. Es müssen demnach, um dann noch selbst ohne Einführung dieser Arbeit der mathematischen Form des Princips Geltung zu verschaffen, auch solche Bewegungen, welche den unmöglichen direct entgegenliegen, als unzulässig genommen werden, wenn sie eine Veränderung des gegebenen Kräftesystemes zur Folge haben. Dass übrigens durch diese Bemerkung die Allgemeingültigkeit des Princips abgeschwächt wird und dasselbe zu einem Hilfssatz der analytischen Mechanik wird, leuchtet bald ein, wenn man die von Clausius vorgeschlagene Bezeichnung in diese umgeänderte Form des Princips einführt.

Dies ist mit grosser Schärfe auseinandergesetzt von Scheffler in der Abhandlung: „Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik (Zeitsch. für Math. u. Physik v. Schlömilch III.).

Aehnliche Bemerkungen lassen sich machen, wenn die Punkte nicht über eine gewisse Grenze hinausdürfen.

Aus dem Obigen scheint mir also hervorzugehen, dass das Princip in seiner ganzen Strenge eine rein logische Folgerung aus den Grundhypothesen ist, in der mathematischen Form hingegen, in der es zur Lösung allgemeiner mechanischer Probleme Verwendung findet und Heterogenes, nämlich Ortsbestimmungen und Kräfte vereinigt, ein Lehrsatz ist, dessen Richtigkeit auf andere mathematische Ausdrücke, welche die Grundhypothesen bezeichnen, zurückgeführt werden muss, dass ferner das Princip in seiner strengen Anwendung wiederum rückwärts ein Prüfstein der vorausgeschickten Hypothesen, namentlich der von der Constanz der

Kraft werden kann, und endlich auch dann ein Mittel ist, einen Aufschluss über das Wesen der verschiedenen Naturkräfte zu geben.

Zum Schluss endlich kann noch behauptet werden, dass dieses Princip, so lange es sich nur handelt um solche Kräfte, die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch mechanische genannt werden, den Ausdruck der allgemein gültigen Erfahrungsthatsache enthält, dass, wie es zu Anfang schon erwähnt ist, bei allen Massen oder Massensystemen, an denen sich Kräfte das Gleichgewicht halten, die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Wege ihrer Angriffspunkte, wenn eine Bewegung des Systems durch irgend eine von Aussen angebrachte Kraft veranlasst wird.

In Bezug auf seine allgemeine und strenge Verwendung, bei der auch andere Kräfte als mechanische berücksichtigt werden sollen, müssen wir aber gestehen, dass dasselbe nur eine durch Erfahrung wahrscheinlich gemachte Annahme enthält, insofern es sich stützt auf das vorhergehende Princip, welches nach dem Obigen noch der vollen Bestätigung durch die Erfahrung bedarf.

Das Gesagte ist enthalten in dem Urtheil von Gauss über das Princip, welches an der oben citirten Stelle sich befindet und folgendermassen lautet: „Der eigenthümliche Charakter des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, dass es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben giebt, und so der Stellvertreter aller anderen Principien ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen, dass es sich, sowie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empfehle.“

Ueber die Wichtigkeit des Princips und über die Stellung desselben zu den anderen wird später noch eine Erörterung angestellt werden müssen.

D'Alembert's Princip.

Leichter wird es sein, ein Urtheil zu fällen über das D'Alembert'sche Princip; denn dieses müssen wir zunächst entschieden in die Kategorie der logischen Folgerungen verweisen oder uns denken als eine Uebertragung eines allgemeinen Gruudsatzes auf die Mechanik.

Die allgemeinen Betrachtungen, welche wir anstellen, um zu dem Principe zu gelangen, würden folgende sein: Wenn ein System materieller Punkte sich infolge des Zusammenhauges und einer an jedem Punkte wirkenden besonderen Kraft P bewegt, so können wir uns diese Bewegung hervorgebracht denken durch Kräfte Q, die sogenannten Effectivkräfte, welche die einzelnen Punkte unter Voraussetzung voller Freiheit angreifen und jeden so bewegen würden, als er sich wirklich bewegt. Wirkt nun auf jeden frei gedachten Punkt Q und $-Q$, die Reactionskraft, so ist das ganze freie Massensystem im Gleichgewicht. Sind die Punkte nicht mehr frei und bleiben die wirkenden Kräfte P, Q und $-Q$, so muss die Wirkung der Verbindung so sein, dass P und $-Q$ gerade aufgehoben werden; denn sonst würde der nicht aufgehobene Theil dieser Kräfte eine Resultante geben, welche mit Q zusammen die dann als frei zu betrachtenden Punkte in eine andere Bewegung versetzte, als sie Q allein hervorbrächte, was gegen die Voraussetzung ist.

Wenn wir die andere Form des Principes erhalten wollen, können wir folgendermassen verfahren: Wir unterscheiden für jedeu Punkt des Systems drei verschiedene Bewegungen, deren Geschwindigkeiten wir mit v, p und u be-

zeichnen; v möge die Geschwindigkeit sein, welche die Punkte erhalten infolge der angebrachten Kräfte unter der Voraussetzung freier Punkte, u diejenige, welche wirklich die Punkte infolge der Kräfte und der Verbindung des Systems haben, und p diejenige, welche mit u als Resultante v giebt. Der Zusammenhang muss also so sein, dass das p aufgehoben wird, denn sonst müsste wirklich eine von u verschiedene Geschwindigkeit stattfinden; da nun umgekehrt p als Resultante von v und $-u$ betrachtet werden kann, so müssen die Kräfte, welche die Geschwindigkeiten v und $-u$ hervorbringen, durch den Zusammenhang verloren gehen.

Beide Ableitungen kommen demnach auf den Grundsatz hinaus, dass, wenn eine Wirkung gleich ist der Zusammenwirkung mehrerer Ursachen und zugleich auch der einer derselben, so müssen die anderen noch vorhandenen Ursachen für sich verschwinden. Bedenkt man ferner, dass die Kräfte, welche die Geschwindigkeit p erzeugen, aufgehalten werden durch den Zusammenhang des Systems, so könnte man diesem Principe auch den Grundsatz: Gleiche Ursachen nach entgegengesetztem Sinne heben sich auf oder $a - a = 0$ zur Unterlage geben

Dass nun aber dieses Princip, welches also der in die Mechanik übersetzte Grundsatz $a - a = 0$ ist, erst so spät in die Mechanik eingeführt worden ist, darf uns nicht zu einer Täuschung über dasselbe veranlassen, denn es handelt sich noch um eine geeignete zur weiteren Benutzung brauchbare Form und diese konnte erst später erlangt werden, durch eine geeignete Bezeichnung des Zusammenhanges der Kräfte, Wege und der Zeit und durch eine genaue Kenntniss der durch Gleichungen ausgedrückten Funktionen.

Damit sind wir zur anderen Betrachtung des Principes gelangt; es ist nämlich nun dessen Verwendbarkeit zu erörtern, die es erlangt hat durch die mathematische Form. Dies wird sich am leichtesten zeigen lassen, wenn wir auf die erstere Ableitung zurückgreifen, in der wir die Bezeichnungen P und Q eingeführt haben. Die Kräfte P sind als gegebene Werthe zu betrachten, wir müssen also deren mathematischen Ausdruck als bekannt voraussetzen; anders aber

ist es mit den Werthen Q. Bekanntlich werden diese ausgedrückt durch das Product der Masse des Massenpunktes in den zweiten Differentialquotienten des Weges desselben nach der Zeit, ein Ausdruck, welcher, wie schon D'Alembert in der Einleitung zu seiner Mechanik sagt, Nichts mit dem Wesen der Kräfte gemein hat. Es ist also diese Bezeichnung, wie auch oben schon erörtert, nur zu nehmen als eine mathematische Uebertragung der Bewegungsgesetze, welche Galilei aufgestellt hat, nach denen bei einer constanten Kraft die Geschwindigkeit proportional der Zeit und der gegebenen Kraft ist, wobei wiederum die Geschwindigkeit bestimmt ist durch das Verhältniss des Weges zur Zeit. Hierbei ist zu erinnern, dass nach der von Gauss eingeführten absoluten Einheit die Masse ausgedrückt wird, indem man als Einheit derselben nimmt diejenige, welche durch die Krafteinheit in der Zeiteinheit die Geschwindigkeitseinheit erlangt. Diese Maasse bleiben aber relativ, so lange wir nicht eine dieser Einheiten bestimmen. Letzteres können wir aber erreichen, wenn wir ein Gewicht, welches entweder ein nationales oder internationales sein kann, als Masseneinheit annehmen. Man darf nämlich nicht glauben (Thomson, Theoretische Physik p. 185), dass das Gewicht eine Kraft ist, sondern es ist nur Masse; denn ein Kaufmann würde bei Anwendung einer gewöhnlichen Waage und einer Reihe von Gewichtstücken seinen Kunden dieselbe Quantität derselben Stoffart geben, wie auch immer die Anziehungskraft der Erde sich ändern möchte, da seine Messung von Massen abhängig ist. Ein anderer dagegen, der sich einer Federwaage bediente, würde in hohen Breiten seine Kunden und in niedrigen Breitengraden sich selbst betrügen, wenn sein Instrument, welches auf Kräften und nicht auf Massen beruht, irgendwo adjustirt wäre.

Es kann also nur dann von einer Anwendbarkeit dieses Principes gesprochen werden, wenn die gegebenen P denselben mathematischen Ausdrücken unterworfen werden. In Bezug auf den Zusammenhang des Massensystems, der also auch hier gegeben ist durch Gleichungen, welchen die Coordinaten der einzelnen Punkte unterliegen, ist dann noch dieselbe Betrachtung anzustellen, welche schon bei dem vorigen Principe gemacht worden ist.

So einfach demnach die Begründung dieses Principes ist, so bietet doch dessen allgemeine Anwendung mit dem der Erhaltung der Kraft zusammengehalten Schwierigkeiten und man wird hier wie bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu unterscheiden haben zwischen einer mechanischen Anwendung, wobei es nur auf die Bewegung von Massensystemen ankommt, und der auf physische Probleme, bei denen sämmtliche Erscheinungen zurückzuführen sein werden auf die Veränderungen der kleinsten Theile, welche aber wiederum nur hervorgebracht sein können durch anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensitäten von der gegenseitigen Entfernung abhängig sind. Das Princip enthält also wie jenes nur eine näherungsweise Lösung der Probleme, wenn man die sogenannten verlorenen Kräfte zur Bestimmung des Ortes des sich bewegenden Massensystems nicht beachtet. Diese Kräfte werden aber entweder die lebendigen Kräfte der Moleküle ändern oder in Spannkräfte übergehen, so dass also die mit Hilfe des Principes gefundenen Bewegungsbahnen nur richtig sein können bis auf die allerdings im Vergleich zu den anderen Effecten verschwindend kleinen Abweichungen, die erfolgen durch das Verbrauchen der verlorenen Kräfte zu Molekularbewegungen.

Es wird demnach auch dieses Princip neben dem vorigen einen Weg zeigen, auf dem man weiter zu gehen hat, um den noch nicht vollständig erwiesenen Satz der Constanz der Kraft ferner zu begründen oder umzustossen oder auch, um sich Aufschluss zu verschaffen über die Art der Molekularbewegungen, welche den bekannten Zustandsänderungen zu Grunde liegen.

Damit sind wir sofort geführt zur Beurtheilung des Standpunktes unseres Principes zur Erfahrung. So lange wir nur sogenannte mechanische Kräfte berücksichtigen, müssen wir es als einen Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache hinstellen; denn es behauptet dasselbe, dass bei jeder Bewegung ein Theil der angewandten Kräfte durch den Zusammenhang des Systems aufgehoben wird und nur der noch übrige Theil die Ortsveränderung hervorbringt und dass nur soviel von den vorhandenen Kräften zur Wirksamkeit kommt, als nöthig ist, um

dem Körpersystem die Bewegung zu ertheilen, welche er wirklich hat, wenn er frei wäre. Dass die Kräfte factisch nicht verloren gehen, wäre eine Folge des Principes der Erhaltung der Kraft, dessen volle Giltigkeit dann weiter über unser Princip entscheiden wird, woraus dann folgt, dass wir in Bezug hierauf unsere Erfahrungskenntnisse erweitern müssen und dass das D'Alembert'sche Princip in seiner vollen Strenge bis jetzt nur als eine wahrscheinlich gemachte Annahme hingestellt werden muss.

Hieran möchte ich nun eine Bemerkung anschliessen, welche einen Aufschluss geben soll über die Stellung der im Folgenden zu erörternden Principien. Das eben betrachtete Princip nämlich muss seiner Allgemeinheit wegen und seiner mathematischen Form nach alle Aufgaben der Dynamik, genauer der Kinetik (Thomson), umfassen. Dasselbe leistet also für diesen Theil der Mechanik das, was das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der Statik giebt, es enthält die Mittel, jede dynamische Aufgabe in eine der Analysis zu verwandeln. Es bilden demnach diese beiden Principien das Fundament der ganzen Mechanik. Wenn man nun aber bedenkt, in welcher Form die genannten Principien die Lösung der mechanischen Probleme geben, so ist klar, dass man sich nach weiteren Principien umsehen muss. Es resultiren nämlich aus dem Principe der verlorenen Kräfte mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten nur Differentialgleichungen, deren Integration die weitere vollständige Lösung des Problems erst liefert. „Es scheint eben darnach, wie Gauss *(Opera V p. 23)* sagt, nicht jedes neue Princip werthlos. Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, dass man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne oder dass sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare. Dennoch aber, wenn es auch immer Fälle giebt, wo einfachere Betrachtungen schneller zum Ziele führen, so kann dies der Vortrefflichkeit der von D'Alembert eingeschlagenen Methode ebenso wenig Eintrag thun, als man z. B. die sogenannte analytische Geometrie aus dem Grunde nicht geringer achten wird, weil sich einige Probleme durch die gewöhnliche Geometrie kürzer oder bequemer auflösen lassen, als durch die analytische."

Nachdem hierdurch die Bedeutung der obigen Principien charakterisirt ist, so bleiben für die noch weiter aufzustellenden folgende Kategorien. Sie enthalten nur Folgerungen aus den vorigen, die dann entweder eine ganze Gattung von Problemen umfassen oder den Aufgaben, auf die sie sich anwenden lassen, eine für die analytische Behandlung schicklichere Form geben. Sie können ferner entstehen durch neue Begriffe und aus der Erfahrung neu herbeigebrachte Eigenschaften der Materie, welche uns allerdings dann zwingen könnten, obige Principien entweder noch nicht als die allgemeinsten anzuerkennen, oder auch dieselben ganz zu verwerfen, was nach unserer obigen Auseinandersetzung über die mechanischen Grundhypothesen wohl möglich ist. Endlich könnte auch ein neues Princip, ohne dass unsere Erfahrungskenntnisse sich vermehrt haben, gefunden werden, welches allgemeiner als die beiden ist und dieselben als Folgerungen enthält. Abzusehen ist bei einer mechanischen Betrachtung von solchen Principien, welche rein analytischer Natur sind und zum Theil nur dazu dienen, die angedeutete Integration ausführen zu können, wie z. B. das Princip des letzten Multiplicators von Jacobi.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Das Princip der lebendigen Kräfte, das Gesetz der Energie, oder, wie es nach Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte p. 44) zweckmässiger genannt werden dürfte, das Princip der Arbeit, wird leicht eine Trennung der Beurtheilung zulassen, indem man einfach ableiten kann, wie viel rein logische Folgerung an demselben ist mit zu Grundelegung der obigen Hypothesen und wie viel daran mathematische Formulirung ist.

Versuchen wir nun zuerst auszuführen, wie weit sich dasselbe als Folgerung darstellen lässt, indem wir nach dem Princip von der Constanz der Kraft voraussetzen, dass es unmöglich sei, durch irgend eine Combination von Naturkörpern bewegende Kräfte fortdauernd aus Nichts zu erschaffen. Denken wir uns ein Massensystem in Bewegung, so müssen wir nothwendig annehmen, dass dasselbe die Geschwindigkeit erlangt hat durch einen Verbrauch von mechanischer Arbeit. Aendert sich dann die Geschwindigkeit, so kann dies nur geschehen durch einen dieser Aenderung entsprechenden Aufwand oder Verbrauch von Arbeit der vorhandenen Kräfte. Damit ist das charakterisirt, was der Satz von der lebendigen Kraft enthält, oder das Princip der Aequivalenz zwischen Arbeit und lebendiger Kraft.

Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft ist aus der oben angegebenen Grundhypothesis der Erhaltung der Kraft von Helmholtz (p. 8) logisch folgendermassen hergeleitet worden. „Denken wir uns ein System von Naturkörpern, welche in gewissen räumlichen Verhältnissen zu einander stehen und unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Kräfte in Bewegung gerathen bis sie in bestimmte andere Lagen gekommen sind, so können wir ihre

gewonnene Geschwindigkeit als eine gewisse mechanische Arbeit betrachten und in solche verwandeln. Wollen wir nun dieselben Kräfte zum zweiten Male wirksam werden lassen, um dieselbe Arbeit noch einmal zu gewinnen, so müssen wir die Körper auf irgend eine Weise in die anfänglichen Bedingungen durch Anwendung anderer uns zu Gebote stehender Kräfte zurückversetzen; wir werden dazu also eine gewisse Arbeitsgrösse der letzteren wieder verbrauchen. In diesem Falle fordert unser Princip, dass die Arbeitsgrösse, welche gewonnen wird, wenn die Körper des Systems aus der Anfangslage in die zweite, und verloren wird, wenn sie aus der zweiten in die erste übergehen, stets dieselbe sei, welches auch die Art, der Weg oder die Geschwindigkeit dieses Ueberganges sein mögen. Denn wäre dieselbe auf irgend einem Wege grösser als die andere, so würden wir den ersteren zur Gewinnung der Arbeit benutzen können, den zweiten zur Zurückführung, zu welcher wir einen Theil der soeben gewonnenen Arbeit anwenden könneu, und würden so in's Unbestimmte mechanische Kraft gewinnen, ein *perpetuum mobile* gebaut haben, welches nicht nur sich selbst in Bewegung erhielte, sondern auch noch im Stande wäre, nach Aussen Kraft abzugeben."

Soweit ist das Princip eine logische Folgerung und es erhält dasselbe die mathematische Form, wenn der Zusammenhang der Geschwindigkeit mit der aufgewendeten mechanischen Arbeit durch eine Gleichung gefunden ist. Dies ist aber schon im Obigen erörtert; denn es ist dort angegeben, durch welchen mathematischen Ausdruck die geleistete Arbeit auszudrücken ist, und auch ist bestimmt worden die Grösse, welche die in Geschwindigkeit übergegangene Arbeit giebt, nämlich die lebendige Kraft, welche nicht unpassend Wucht genannt worden ist.

Daraus ergiebt sich sofort, dass unser Princip nur ist ein specieller Ausdruck des allgemeinen, der Erhaltung der Kraft, oder auch, dass es aufzufassen ist als das obige Princip, nur angewandt auf Massenbewegung im Gegensatz zu den dort hereingezogenen Molekularbewegungen. Die hier gefolgerte Form unseres Princips erlaubt dann wiederum rückwärts zu schliessen auf die Art der Kräfte, was von Helmholtz in der schon öfter citirten Abhandlung gemacht wor-

den ist. Es resultirt nämlich aus den Betrachtungen dieses geistreichen Forschers, dass das Princip nur dann allgemein gültig ist, wenn die Richtung und Intensität der bewegenden Kräfte bei einem System von Punkten nur abhängt von der Stellung der Punkte gegen einander, und dass, wenn wir die Kräfte von einem Punkte ausgehend denken, diese in Bezug auf Richtung und Intensität nur Funktionen der Entfernungen von diesen Punkten sind. Es bringt uns also dieses Princip wiederum auf den schon oben erörterten Begriff der Kräfte, sodass also auch hierdurch die Annahme von Centralkräften als die einfachsten bestätigt wird. Wie gross dabei das Verdienst der Mathematik ist, soll am Schluss der Betrachtung dieses Principes genauer gewürdigt werden.

Es erfordert nun aber noch eine weitere Betrachtung die Form, unter der das Princip der lebendigen Kräfte gewöhnlich erscheint, wodurch die oben angegebene beschränkte Anwendung desselben deutlicher hervorgeht. Dadurch werden wir auch finden den Zusammenhang dieses Principes mit den schon erörterten; denn wir können den mathematischen Ausdruck desselben herleiten durch einfache mathematische Betrachtungen, welche sich an das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und der verlorenen Kräfte anschliessen, so dass das Princip, während es oben als eine rein logische Folgerung dargestellt ist, zugleich erscheint als das Resultat mathematischer Forschung.

Setzen wir die Verschiebungen der Massenpunkte, welche bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nur den Bedingungen der Aufgabe unterworfen waren, stattfindend auf den Bewegungscurven selbst, d. h. lassen wir die Coordinaten der Punkte x, y z in die Werthe $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ übergehen, so dass also die Componenten der Verschiebungen dx, dy, dz sind, so erhalten wir mit Hülfe der bekannten Bezeichnungen unter Anwendung des Princips der verlorenen Kräfte

$$\Sigma(m\frac{d^2x}{dt^2} - X)dx + \Sigma(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y)dy + \Sigma(m\frac{dz^2}{dt^2} - Z)dz = 0.$$

Da nun

$$dx = \frac{dx}{dt}dt,\ dy = \frac{dy}{dt}dt,\ dz = \frac{dz}{dt}dt,$$

so kann diese Gleichung auf folgende Form gebracht werden

$$\Sigma(Xx' + Yy' + Zz')\,dt = \Sigma m\,(x''x' + y''y' + z''z')\,dt,$$

woraus sich für ein Zeitintervall t_0 bis t ergiebt

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma(Xx' + Yy' + Zz')\,dt = \Sigma\frac{m}{2}\,[s'^2]_{t_0}^{t} = \Sigma\frac{m}{2}\,(v^2 - v_0^2).$$

Hiermit ist die gewöhnliche Form des Principes abgeleitet, wobei freilich vorläufig noch angenommen ist, dass man die Variationen mit den Differentialen beliebig vertauschen kann. Es muss sich also hieran die mathematische Erörterung knüpfen, ob es unter allen Umständen möglich ist, diese Vertauschung vorzunehmen.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass die Variationen δx, δy, δz und die Differentialien dx, dy, dz nur dann vertauscht werden können, wenn die gegebenen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht oder wenigstens nicht explicite enthalten. Dies muss aber immer stattfinden, wenn man die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen in ihrer wahren Bedeutung, wie dieselbe anderen Ortes schon erörtert worden ist, nimmt, so dass also, wenn hier eine beschränkte Anwendung des Principes gefolgert ist, dies vielmehr so gedeutet werden muss, dass man nicht bis zu den letzten Gründen zurückgehen will, sondern es nur darauf ankommt, den Erfolg zusammengesetzter Bewegungskräfte zu berechnen in solchen Fällen, wo die Auflösung derselben in einfache noch nicht gelungen ist, da Bedingungsgleichungen, welche überhaupt anderes als einfache Kräfte enthalten, nur eine Zusammenfassung durch mehrere Kräfte hervorgebrachter Erscheinungen sein können. So würde z. B. der Fall zu deuten sein, den man gewöhnlich anführt als Beispiel, dass die Zeit explicite in den Bedingungsgleichungen enthalten sein kann. Ein sich bewegender Massenpunkt sei gezwungen, auf einer Oberfläche zu bleiben, die sich mit der Zeit ändert. Dass das Verbleiben auf einer Oberfläche streng genommen zu betrachten ist als die Wirkung von Kräften, ist bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bereits erörtert. Wenn sich nun diese Oberfläche mit der Zeit ändern soll, so müssten wir dies auf die Kräfte übertragen, deren Ver-

wandlung bei dem Principe der Erhaltung der Kraft angedeutet ist.

Es enthält ferner die eben hergeleitete mathematische Form unseres Princips eine Beschränkung durch das Integral. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn sich dieses nicht angeben liesse, das Princip nichts weiter als einen mathematischen Lehrsatz enthielte. Da nun aber durch die obige Folgerung dessen allgemeine unbedingte Gültigkeit dargethan ist, so folgt umgekehrt, dass die angedeutete Integration sich immer ausführen lassen muss, es also immer eine Kräftefunction giebt und dass also, wenn dies in der betreffenden Form nicht erreicht ist, der Grund nur liegen kann entweder in der Art der Bildung der unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke oder in einer nöthigen Einschränkung des Begriffes von Kraft, welche letztere also dann als wesentliche Merkmale der Kraft die Bedingungen enthielte, deren Erfüllung man als gegeben voraussetzt, wenn man sagt, dass das Princip der Erhaltung der Kraft gelte.

Eine ähnliche Bemerkung kann man machen in Bezug auf die Probleme, bei denen sogar die Massen als von der Zeit abhängig gedacht werden müssen, wie z. B. bei den elektrischen Untersuchungen. Auch hier fehlt es noch an einer völligen Zurückführung der physikalischen Erscheinungen auf Wirkungen einfacher Kräfte.

Nach diesen Erörterungen scheint das Princip nicht direct aus der Erfahrung hervorzugehen, während man nach den historischen Erörterungen über dasselbe versucht sein könnte anzunehmen, dass es ursprünglich der Ausdruck einer Erfahrungsthatsache gewesen ist. Letzeres ist nnn aber nur soweit richtig, dass nach einer genauen Beobachtung jede in Bewegung befindliche Masse einen Widerstand überwindet, der der Arbeit entspricht, welche die Bewegung hervorgebracht hat.

Wieweit ist nun dieses Princip durch den bisherigen Umfang der Erfahrungskenntniss eine wahrscheinlich gemachte Annahme?

Allgemein ist schon seit langer Zeit das Princip anerkannt in Bezug auf die Bewegungen, welche stattfinden unter dem Einfluss der allgemeinen Gravitation sowohl der Himmelskörper als auch der schweren auf der Erdoberfläche.

Bei den Himmelskörpern ist es ausgedrückt durch die Zunahme der Geschwindigkeit derselben, wenn sie sich dem Centralkörper nähern, durch die Unveränderlichkeit der grossen Axen ihrer Bahnen und endlich durch die Dauer ihres Umlaufs und ihrer Rotation. Bei den fallenden Körpern ist es durch die Thatsache gegeben, dass die Geschwindigkeit an irgend einem Punkte nicht abhängt von der Richtung und Form der Fallbahn, und dass ein Körper, um auf eine gewisse Höhe zu gelangen, dieselbe Geschwindigkeit erhalten muss, die er beim Fall von dieser Höhe erlangt hätte.

Schon gegen den hier erwähnten zweiten Fall könnte man mit Recht einwenden, dass unser Princip nicht stattfinde; denn die eben angegebenen Resultate stimmen nicht mit der gemeinen Beobachtung überein. Noch mehr gilt die eben gemachte Bemerkung bei der Uebertragung von Bewegungen durch feste Körper und bei den Bewegungen fester und flüssiger elastischer Körper; denn es müsste die Uebertragung dem Principe nach ungeschwächt stattfinden und in Bezug auf die zweite Art der Bewegung stimmen unsere Beobachtungen z. B. beim Stoss nicht mit den Folgerungen des Princips überein. Zu diesen Erscheinungen gehören die Wellenbewegungen, deren lebendige Kraft zu verschwinden scheint oder die durch Absorption Ursache anderer Erscheinungen werden, deren Aequivalenz mit der ersten in den meisten Fällen schwierig zu bestimmen ist. Man wird aber durch eine einfache Ueberlegung sich bald überzeugen, dass wir dann bei der Rechnung Voraussetzungen gemacht haben, die in der Natur nicht erfüllt sind; denn wir müssen bei Uebertragung der Bewegung den vermittelnden Körper absolut unzusammendrückbar und unausdehnbar nehmen, ferner müssen wir beim Stoss eine absolute Elasticität voraussetzen und bei der ohne neuen Anstoss fortdauernden Wellenbewegung neben der Annahme einer absoluten Elasticität noch absehen von einer Reibung im Innern und gegen die Umgebung.

Man ist also in vielen Fällen geneigt anzunehmen, dass unser Princip mit der Erfahrung im Widerspruch steht; so, um noch einen Fall zu erwähnen, welcher der Aufstellung des Princips wirklich einige Schwierigkeit bereitet hat, müsste ein Pendel nach dem Principe fortwährend dieselben

Schwingungen machen, während doch dessen bald eintretende Ruhe oft genug beobachtet werden kann. Kurz in der Natur kann ein materielles System nie durch eine in sich-zurücklaufende Bewegungsreihe gebracht werden, ohne dass mehr Arbeit gegen die wechselseitigen Kräfte seiner Theile verausgabt werde als durch diese Kräfte gewonnen wird, da keine Bewegung stattfinden kann ohne dass Widerstände aufträten. Solche Widerstände sind hervorgebracht durch Reibung oder sie rühren von der Zähigkeit der Medien her, oder sie haben ihren Grund in den ihrem Wesen nach noch unergründeten Kräften, der Elektricität und des Magnetismus, die auch mit der Zeit sich ändern können. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass man bei täglicher Beobachtung dieser beeinträchtigten Bewegung dem Princip lange Zeit nur mehr eine mathemetische als eine physikalische Gültigkeit zugesprochen hat. Eine genauere Beobachtung hierher gehöriger Erscheinungen lehrt aber, wie schon oben angedeutet, dass dann, wie bei allen derartigen Phänomenen Wirkungen, welche einen Theil der lebendigen Kräfte absorbiren, übersehen werden, und dass dann unser Satz die im Princip der Erhaltung der Kraft gegebene Verallgemeinerung gleichsam fordert, indem dasselbe die Betrachtung von den während eines bestimmten Augenblicks wirksamen Kräften auf diejenigen ausdehnt, welche möglicherweise zur Wirkung gelangen können. Indem also das neue Princip diese potentiellen Kräfte in Betracht zieht, ist es wesentlich nur ein Fortschritt in der Begriffsscheidung, thatsächlich aber liegt es in dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft bereits eingeschlossen. Es führt also unser Princip zu der Transformation der Naturkräfte in bestimmten Aequivalenzverhältnissen oder zwingt uns bei den bereits oben angegebenen Näherungen stehen zu bleiben. Hierauf würde sich dann auch die Consequenz beziehen, die wir oben der gewöhnlichen Annahme entgegen ziehen mussten, dass nämlich die angedeutete Integration sich immer ausführen lassen müsste, so dass also diese Unvollständigkeit in der willkürlich gesetzten Beschränkung des Princips liegt, aber der Annahme einer allgemeinen Gültigkeit desselben kein Hinderniss bereitet.

Aus diesen Erörterungen geht nun hervor, dass unser Princip nur dann durch die Erfahrung bestätigt wird, wenn wir von den Erscheinungen abstrahiren, bei denen scheinbar ein Theil der vorhandenen Kraft so absorbirt wird, dass er verschwindet. Aber nur, wenn ausser den wahrnehmbaren Bewegungen und den messbaren Kräften, mit denen wir durch directe Beobachtung bekannt werden, auch die das Licht, die Wärme, Elektricität und Magnetismus ausmachenden unmessbar kleinen Bewegungen von Theilen, die vielleicht die letzten Moleküle der Materie sind, sowie die zwischen den Molekülen thätigen chemischen Affinitätskräfte in Rechnung gezogen werden, können wir den allgemeinen conservativen Charakter aller dynamischen Wirkung in der Natur erkennen und einsehen, dass das Princip der Constanz der Energie auch für die ganze Classe der von einem Widerstand begleiteten Naturwirkungen gilt, die es anscheinend verletzen.

In Bezug auf die Stellung dieses Princips zu dem der virtuellen Geschwindigkeiten kann noch Folgendes gesagt werden. Ist nämlich einmal der allgemeine Ausdruck für dasselbe gewonnen, so kann es als Fundament dienen und können die anderen daraus abgeleitet werden. Soll ein Punktsystem infolge daran angebrachter Kräfte in seinem Bewegungszustande sich nicht ändern, so kann weder eine Vermehrung noch Verminderung der lebendigen Kraft stattfinden, das würde heissen, dass die Summe der Arbeiten entweder constant ist oder verschwindet, womit das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gefunden wäre. Daraus würde folgen, dass das Princip der lebendigen Kraft der allgemeinste und wichtigste Satz wäre und die ganze Mechanik in sich fasse.

Es scheint mithin zwischen diesen Principien ein ähnlicher Zusammenhang zu existiren, wie zwischen den Winkelpaaren bei Parallellinien, von denen auch ein jeder sich ohne Schwierigkeit entwickeln lässt, wenn einmal einer als richtig anerkannt ist.

Wenn daher auch zugegeben werden muss, dass die Mathematik der Entwickelung der mechanischen Gesetze grossen Dienst erweist, so ist doch die eigentliche Entdeckung von mechanischen Gesetzen nicht deren Verdienst;

denn es ist die Formel nichts als der mathematische Ausdruck eines bereits im Geiste klar erkannten Zusammenhanges der Erscheinungen und deswegen ist das, was aus der Formel herausgerechnet wird, schon darin enthalten. Es sind daher die durch die Mathematik erhaltenen Resultate nur ebenso sicher als die erste Gleichung und deren Betrachtung kann dann eben nur zu neuen Auffassungen führen, die das ursprünglich Ausgesprochene bestätigen. Diese Bemerkung wird nun auch noch von Bedeutung bei Betrachtung der nächstfolgenden Principien.

Princip der Erhaltung des Schwerpunktes.

Um ein Urtheil zu fällen über das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes oder des Massenmittelpunktes oder des Princips der Erhaltung der Quantität der Bewegung, wird es passend sein zu betrachten, wie dasselbe hergeleitet wird.

Nach dem D'Alembert'schen Princip in Verbindung mit dem der virtuellen Gechwindigkeiten gilt unter Beibehaltung der gebräuchlichen Bezeichnungen

$$\Sigma(X-mx'')=0,\ \Sigma(Y-my'')=0,\ \Sigma(Z-mz'')=0,$$

wenn die δx, δy, δz von einander unabhängig sind. Die Tragweite dieser Bedingung ist schon bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erörtert worden. Führt man dann folgende Bestimmung ein

$$\Sigma mx=Mx_1,\ \Sigma my=My_1,\ \Sigma mz=Mz_1,$$

wo M die ganze Masse des Systems bezeichnet und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines durch diese Gleichungen definirten Punktes sind, so erhält man durch Substitution dieser Werthe die Gleichung des zu erörternden Princips.

Es erscheint darnach dasselbe als Folgerung aus den oben bei der Herleitung angegebenen Principien unter Hinzunahme einer neuen Definition. Es wird demnach zuerst nothwendig sein diese neue Begriffsbestimmung zu erörtern.

Dass ein solcher Punkt, der sogenannte Schwerpunkt d. h. ein Punkt, in dem man sich die ganze Masse des Körpers versetzt denken kann, in jedem Körper, der der gewöhnlichen terrestrischen Gravitation unterworfen ist, existirt, ist ein Ausdruck einer allgemein anerkannten Erfahrungsthatsache, während in aller Strenge der Theorie der resultirenden Wirkung der Schwere nur bei einer bestimmten Art der Stoffvertheilung ein solcher Punkt eines starren Körpers existirt. Obgleich nun damit zunächst angedeutet

scheint, dass unser Princip auch nur ein ungenaues sein könne, so werden wir doch dessen allgemeine Gültigkeit anerkennen müssen, wenn wir den oben aufgestellten Begriff weiter prüfen, indem wir die Schwere der Körper nicht berücksichtigen. Nach unserem Postulate über die Materie können wir uns dieselbe zunächst zerlegt denken in Gruppen materieller Punkte, deren Massen ungleich sind, um nicht weit in metaphysische Erörterungen, wie sie von Schelling angestellt sind, zu gerathen. Diese können wir aber in eine grosse Anzahl gleicher materieller Punkte auflösen, so dass jeder der ursprünglichen Punkte je nach der Grösse seiner Masse natürlich mehr oder weniger dieser Theile enthält. Sollten die Grössen der gegebenen Massen incommensurabel sein, so können wir dadurch, dass wir die Theile hinlänglich klein nehmen, dieser Forderung noch genügen. Setzen wir dies fest, so kann keine Unklarheit des durch die oben aufgestellten Gleichungen definirten Punktes entstehen, so dass wir für jede Massenvertheilung einen solchen Punkt bestimmen können. Es ist daher unpassend den oben definirten Punkt Schwerpunkt zu nennen, sondern rathsam für denselben die im Obigen gebrauchte Bezeichnung „Massenmittelpunkt“ oder die von Thomson eingeführte „Trägheitsmittelpunkt“ beizubehalten. Wenn man nun diese Begriffsbestimmung eines in jedem Massensystem vorhandenen Punktes benutzt, so müssen unter Voraussetzung der Bedingung über die Unabhängigkeit der Variationen die obigen Bewegungsgleichungen umgeseszt werden dürfen in

$$Mx_1'' = \Sigma X,\ My_1'' = \Sigma Y,\ Mz_1'' = \Sigma Z,$$

welche die Gleichungen unseres Princips sind.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass dasselbe nur eine rein mathematische Folgerung aus den bereits erörterten Principien ist, zu der man *a priori* nicht kommen wird.

Dass diese Behauptung richtig ist, wird noch bestätigt dadurch, dass diese Gleichungen, wie Thomson § 229 entwickelt, sich aus rein geometrischen Sätzen entwickeln lassen, die sich beziehen auf eine gewisse Menge von Punkten. Diese geometrische Ableitung rechtfertigt die oben angegebene erstere Bezeichnung des Princips, während der zweite Name auf eine logische Consequenz deutet, von der nachher die Rede sein soll.

Würde also unserem Satze durch irgend eine Erfahrungsthatsache widersprochen, so könnte dies nur einen Rückschluss auf die Postulate über die Materie oder auf die Principien, aus denen es gefolgert wird, machen lassen, bis jetzt freilich bestätigt unsere Erfahrungskenntniss, wenn sie geläutert wird durch eine genaue Berücksichtigung aller wirkenden Kräfte, die Richtigkeit des aufgestellten Princips.

Damit ist aber nur erst eigentlich charakterisirt das Princip der Bewegung des Massenmittelpunktes. Eine weitere nur mathematische Erörterung unter bestimmten Voraussetzungen über die Beschaffenheit der vorhandenen Kräfte führt uns dann zu dem Princip der Erhaltung des Massenmittelpunktes, welches behauptet, dass der genannte Punkt sich gleichförmig in gerader Linie bewegt oder in Ruhe bleibt, wenn er anfänglich ruht.

Unser Princip lässt sich endlich ohne die allgemeinen Bewegungsgleichungen direct aus dem Princip der Trägheit und dem der gleichen Gegenwirkung durch rein logische Folgerungen herleiten. Wenn nämlich zwei starre Körper auf irgend eine mit ihrem Zustande verträgliche Weise auf einander einwirken, so kann die Summe deren Bewegungsgrösse nach dem Principe der gegenseitigen Wirkung keine Aenderung erfahren durch die Wechselwirkung der Körper, es muss mithin deren Massenmittelpunkt nach dem Trägheitsprincip gleichförmig in gerader Linie fortgehen, ausser wenn die Richtung oder Geschwindigkeit seiner Bewegung durch Kräfte geändert wird, welche zwischen diesen Körpern und irgend einem anderen wirken. Sowie es hier für zwei Körper erörtert ist, muss es auch gelten für ein System von Körpern. Ganz auf dieselbe Art ergiebt sich dann der erste Theil unseres Satzes, dass der Massenmittelpunkt eines beliebigen Körpers oder Körpersystems sich so bewegt, wie ihre gesammte Masse sich bewegen würde, wenn sie in diesem Punkte concentrirt wäre und unter dem Einfluss von Kräften stände, die den auf die verschiedenen Theile in Wirklichkeit wirkenden Kräften gleich und parallel sind.

Princip der Erhaltung der Flächen.

Die verschiedenen Formen des Princips der Erhaltung der Flächen scheinen auch verschiedene Auffassungsweisen zuzulassen. Spricht man von der Proportionalität der Flächen und Zeiten, so liegt es nahe dasselbe für eine rein mathematische Folgerung zu halten, berücksichtigt man aber die anderen Formen, in denen von Constanz der Momente der Quantitäten der Bewegung oder gar von Erhaltung der Wirkung die Rede ist, so ist man geneigt demselben eine metaphysische Gültigkeit zuzuschreiben.

In der letzten eben angebenen Form ist aber ein ganz unbestimmter Ausdruck enthalten, denn es ist nicht an und und für sich klar, was unter Wirkung *(action)* zu verstehen ist und die genaue Angabe dieser Grösse führt sofort ab von dem allgemeinen Begriffe zu einer rein mathematischen Definition, so dass das Wort Wirkung nur als ein ganz willkürlich genommener Name erscheint.

Die erste Form lässt dasselbe als einen rein mathematischen Satz erscheinen, was auch deutlich hervorgeht aus der Herleitung desselben, wie dieselbe z. B. gemacht werden kann mit zu Grundelegung des Princips des Gleichgewichtes der verlorenen Kräfte und der Zerlegung jeder Bewegung in eine fortschreitende und drehende. Den Momentengleichungen der verlorenen Kräfte können wir folgende Form geben:

$$\Sigma m\,(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}) = \Sigma(xY - yX),$$

$$\Sigma m\,(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}) = \Sigma(yZ - zY),$$

$$\Sigma m\,(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}) = \Sigma(zX - xZ).$$

Sind nun die von aussen wirkenden Kräfte so beschaffen, dass die rechten Seiten verschwinden, so sind die linken vollständige Differentiale, deren Integrale

$$\Sigma m\,(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}) = c_1,$$

$$\Sigma m\,(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}) = c_2,$$

$$\Sigma m\,(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}) = c_3,$$

nach den Lehren der analytischen Geometrie das Princip enthalten. Die rechten Seiten der obigen Gleichungen werden aber gleich 0, wenn die bei der historischen Erörterung angegebenen Bedingungen erfüllt sind. So wäre denn dem Principe keine andere Bedeutung beizulegen als die eines mechanischen Lehrsatzes in mathematischer Form, der mit Hülfe der aus der Mathematik hergenommenen Bezeichnung mechanischer Gesetze gefolgert wird; der Satz wäre demnach schon in den obigen Principien enthalten und kann nur eine durch die Erfahrung gewonnene Bestätigung der mathematischen Ausdrücke für mechanische Grössen bewirken.

Es giebt keine Beobachtung, welche mit demselben im Widerspruch steht. Er findet vor Allem seine Bestätigung bei der Bewegung der Himmelskörper, für die er auch den Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Thatsache enthält.

Die zweite Form des Princips deutet auf Grundhypothesen und es soll nun im Folgenden dargethan werden, dass wir das Princip folgern können aus dem Grundsatze der gleichen gegenseitigen Wirkung und aus dem Trägheitsprincip. Gehen wir der Einfachheit wegen, wie bei Erörterung des vorigen Princips von zwei starren Körpern aus, die durch die Wechselwirkung der zwischen denselben thätigen Kräfte zusammengehalten werden, so muss bei ihnen die Summe der Momente der Bewegungsgrösse in Beziehung auf irgend eine Linie, die eine im Raume festliegende Richtung hat und durch einen beliebigen Punkt geht, der sich gleichförmig in einer geraden Linie nach irgend einer Richtung zu bewegt, constant bleiben. Ganz so können wir für ein ganzes System von Körpern schliessen, das nur durch die wechselseitig wirkenden Kräfte zusammengehalten wird, also keine Einwirkung von aussen erfährt.

Princip der kleinsten Wirkung.

Ebenso leicht wird es sein über das Princip der kleinsten Wirkung zu urtheilen. Dasselbe erscheint in dieser Form und noch mehr unter dem Satz, dass die Natur ihre Wirkung mit dem kleinsten Kraftaufwand erreicht, als eine metaphysische Wahrheit, als ein Satz, der an und für sich klar ist, wodurch er das Merkmal eines Grundsatzes erlangt. Wenn nun aber auch als selbstverständlich zugegeben wird, dass jede Bewegung eines Systems in der Art wie sie wirklich erfolgt auf die leichteste Weise vor sich gehen werde, abgesehen von der in dieser Ansicht enthaltenen unhaltbaren Teleologie, so ist doch nicht ohne Weiteres klar, dass das Produkt aus der Bewegungsgrösse und dem Bahnelement das eigentliche Maass für diejenige Grösse sei, welche zu einem Min. werden muss.

Richtig urtheilt über dieses Princip Poisson (I p. 460), wenn er behauptet, dass dasselbe einen Schein von metaphysischer Wahrheit an sich trägt, und dass es einen unpassenden Namen erhalten hat.

Ebenso spricht sich Lagrange aus, obgleich derselbe sogar ursprünglich aus ihm alle seine Resultate in der Mechanik hergeleitet hat, bis er, als er jene Resultate streng begründen wollte, das Princip verliess und das der virtuellen Geschwindigkeiten zur Basis seiner Entwickelungen nahm. Lagrange behauptet, dass dieses Princip mit seinem unpassenden Namen nicht wie ein metaphysisches Princip angesehen werden kann, sondern wie ein einfaches Resultat aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik.

Einen hohen Werth legt Thomson auf dieses Princip, indem er sagt: *(Theor. Ph. § 318)* „Maupertuis berühmtes Princip der kleinsten Wirkung ist bis jetzt mehr als eine sonderbare und etwas verwirrende Eigenschaft der Bewegung,

denn als ein nützlicher Führer in kinetischen Forschungen angesehen worden. Wir haben aber die feste Ueberzeugung, dass man demselben eine viel tiefere Bedeutung beilegen wird, nicht nur in der abstracten Dynamik, sondern auch in der Theorie mehrerer Zweige der Physik, die jetzt anfangen, dynamische Erklärungen zu erhalten."

Dass das Princip, welches eine symbolische Formel giebt, in welche das gefundene System von Differentialgleichungen sich zusammenfassen lässt, in sich selbst schon den Anspruch auf eine metaphysische Wahrheit aufgeben muss, geht auch entschieden daraus hervor; dass das geforderte Min. nicht in allen Fällen vorhanden ist, sondern dass die in Rede kommende Variation auch verschwindet ohne dass das Integral weder ein Min. noch ein Max. ist; ferner daraus, dass das Min. des Integrals nicht bei zwei beliebigen Positionen des Systems statt hat, sondern nur, wenn die Endposition und Anfangsposition hinlänglich nahe sind. Da die Herleitung des Princips nur eine Aufgabe der mathematischen Analysis ist, so kann sie hier übergangen werden. Jacobi hat demselben, wie er (p. 45) sagt, die wahre Form gegeben, eine Form für welche es schwer sein dürfte eine metaphysische Ursache aufzufinden.

Was nun zum Schluss seine Stellung zur Erfahrung anlangt, so kann keine Rede davon sein, dass es ein Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Thatsache ist, da es nur eine analytische Bedingung giebt, die sich so ausdrücken lässt: Es verschwindet die Variation der Wirkung, was das Merkmal eines Minimums, Maximums oder eines Maximumminimums ist.

Princip des kleinsten Zwanges.

Das letzte zu erörternde Princip, das des kleinsten Zwanges, dessen statischen Theil Möbius, wohl veranlasst durch die im ersten Abschnitt der Arbeit citirte Bemerkung von Gauss, das Princip der kleinsten Quadrate nennt, oder das Princip, welches man dem D'Alembert'schen gegenüber füglich das Gauss'sche Princip nennen kann, ist wie die meisten der erörterten Principien, einer doppelten Auffassung zugänglich.

Giebt man nämlich demselben die folgende Form: die Bewegung eines Körpersystems geschieht in jedem Augenblicke in möglichst grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglichst kleinstem Zwang, so erscheint dasselbe als ein rein logischer Grundsatz, so dass damit das gerechtfertigt ist, was Gauss sagt, dass das Princip, sowie es nur ausgesprochen ist, schon von selbst sich als plausibel empfiehlt und in dieser Beziehung einen Vorzug vor dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hat.

Es bleibt aber noch zu erörtern, was unter dem Zwang zu verstehen ist, und dies führt uns zu einem mathematischen Ausdruck für diesen allgemeinen Begriff. Der Zwang ist aber jedenfalls ausgedrückt durch die Arbeit der von der freien Bahn ablenkenden Kraft. Bezeichnen wir demnach dieselbe mit q und mit bc den Weg, der infolge dieser Kraft zurückgelegt wird, so ist das Princip mathematisch dargestellt, wenn man den oben schon erörterten Begriff der Arbeit benutzt, durch $\Sigma qbc = \text{Min.}$ Es ist dann weiter eine rein mathematische Folgerung mit Berücksichtigung des Maasses der Kräfte durch die Acceleration, dass man diese Kraft q setzen kann proportional $m.bc$, woraus sich dann die von Gauss entwickelte Form $\Sigma mbc^2 = \text{Minim.}$ ergiebt.

Der Werth des Princips besteht aber, wie Gauss angiebt darin, dass es die Gesetze der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in grösster Allgemeinheit umfasst. Die Ausführung dieser Behauptung ist enthalten in der oben citirten Abhandlung von Scheffler. Es kann demnach dieses Princip als Grundlage der Mechanik genommen werden, wenn auch damit nicht behauptet werden soll, dass das D'Alembert'sche Princip in Verbindung mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten nicht meist eine leichtere Handhabung gestattet.

Die Stellung des genannten Princips zur Erfahrung ist dieselbe wie die des Princips der kleinsten Wirkung, da auch hier die Bewegung solchen gegenübergestellt wird, die factisch nicht vorkommen.

Nachdem nun hierdurch das rein Mechanische der einzelnen Principien erörtert ist, bleibt zum Schluss noch übrig, auf eine Bemerkung näher einzugehen, welche schon bei dem Princip der Erhaltung der Kraft gemacht worden ist, um die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften nach dem jetzigen Stand derselben zu charakterisiren. Es muss noch angegeben werden, inwiefern diese Principien eine noch grössere Tragweite erhalten können, indem dieselben auch bezogen werden auf das Gebiet der chemischen Processe und des organischen Lebens.

Die Erörterung in Bezug auf die chemischen Erscheinungen muss sich anknüpfen an die Betrachtung der Kraft, welche man gewöhnlich mit dem Namen der chemischen Affinität oder Verwandtschaft bezeichnet. Wir erhalten einen grossen Theil der Wärme, welche wir mit Hilfe unserer Maschinen in mechanische Arbeit umsetzen, durch den Verbrennungsprocess, d. h. durch chemische Verbindung. Es liegt daher der Gedanke nahe, von einer mechanischen Wärmetheorie weiter zu gehen zu einer mechanischen Theorie der Affinität, indem wir nämlich annehmen, dass die nächste Arbeit der chemischen Affinität die Wärme ist. Damit würde also die letzte Ursache der Kraft in der Dampfmaschine nicht in der Wärme zu suchen sein, sondern in der chemischen Differenz zwischen dem Brennmaterial und der feuernährenden Luft, einer Differenz, die aber wiederum erzeugt worden ist und immer von Neuem sich bildet durch die Sonnenstrahlen, welche die beim Verbrennen erzeugte Kohlensäure in brennbaren Kohlenstoff und freien Sauerstoff vermittelst der Pflanzen zertheilt. Dadurch bringen wir dann wieder die Affinität zurück auf Sonnenarbeit, also auf Wärmearbeit. Auf das Letztere, da dadurch unsere Betrachtungen abermals auf ein neues Gebiet, nämlich das Organische, hinübergeleitet werden, kommen wir später zurück.

Es ist nun nicht zu leugnen, dass in dem Begriffe der Affinität viel Unbestimmtes enthalten ist und dass wir nus

trotz der Hypothesen zur Erklärung dieser Kraft immer noch in Bezug darauf kaum am Anfang der Entwickelung einer den anderen Zweigen der demonstrativen Naturwissenschaften entsprechenden Theorie befinden. Wir begnügen uns noch heute mit den in die Chemie von Berzelius durch die elektrochemische Theorie eingeführten Ausdrücken, wenngleich die gewöhnliche Auffassung der Verwandtschaftswirkungen ebenso wie die elektrochemische Theorie weniger eine Erklärung als eine Umschreibung des Thatsächlichen genannt werden kann.

Wenn wir also von diesen angedeuteten Hypothesen keinen Gebrauch machen wollen, so müssen wir uns das Wesen dieser chemischen Kraft klar zu machen suchen, indem wir sie vergleichen mit anderen Kräften. Wir können dieselbe aber im Gegensatz zu den anderen Naturkräften, Elektricität, Magnetismus, Licht, Wärme, als solche bezeichnen, die an den Körpern haftet, so dass sie nicht von einem zum anderen übergehen kann, wir können sie also zusammengesetzt denken aus Flüchtigkeit, specifischem Gewicht, Durchsichtigkeit, Schmelzbarkeit und dergleichen. Bei einer chemischen Verbindung werden diese Kräfte zum Theil frei gemacht, und es hängt nun von der Art des Vorganges ab, ob sie in Wärme oder Elektricität übergehen. Und es kann nun behauptet werden, dass, wenn wir uns noch der in der Wärmelehre eingebürgerten Bezeichnuugsweise bedienen, bei einem chemischen Processe stattfindet ein Austreten von Wärme, wenn vorhanden ist ein Verlust von chemischer Affinität und umgekehrt, dass, wenn ein Eintreten von Wärme stattfindet, dadurch die chemische Affinität zunimmt. Im ersteren Falle würden wir also erhalten höheres specifisches Gewicht, höhere Schmelzbarkeit, höheren Siedepunkt, chemische Indifferenz, grössere Härte und dergleichen, während im anderen Falle das Gegentheil stattfinden muss.

Damit ist das Gesetz, welches theilweise durch das Experiment bestätigt ist, von Hess (Pogg., L 392, LVI 598) erklärt, dass nämlich bei der chemischen Verbindung mehrerer Stoffe zu gleichen Produkten stets gleich viel Wärme hervorgebracht werde, in welcher Ordnung und in welchen Zwischenstufen auch die Verbindung vor sich gehen möge. Dieses Gesetz stellt den Ausdruck für das Princip der Erhaltung der Kraft dar, wenn die beim chemischen Processe entstehende Wärme die Quantität der lebendigen Kraft ist,

welche durch die bestimmte Quantität der chemischen Anziehungskräfte hervorgebracht werden kann.

Auch kann hieraus das Gesetz von Kopp (Physik und theoretische Chemie II p. 236) gefolgert werden: „Wenn zwei Körper bei ihrer Vereinigung selbst schon Wärme entwickeln, so kann bei der nachherigen Verbrennung der Verbindung nicht mehr so viel Wärme entwickelt werden, als die Bestandtheile, einzeln verbrannt, ergeben hätten. Die Verbrennungswärme der Verbindung ist wohl stets im Vergleich zu der der einzelnen Bestandtheile um so viel kleiner, als bereits Wärme durch die Vereinigung der letzteren ausgeschieden wurde."

Dieses logisch richtig erkannte Gesetz, von dem Kopp selbst sagt, dass für solche Verbindungen, welche sich unter starker Wärmeentwickelung aus zwei brennbaren Bestandtheilen bilden und selbst noch brennbar sind, experimentelle Bestimmungen aller in Betracht kommenden Wärmewirkungen fehlen, verdient aber insofern durch die Erfahrung eine Berichtigung, als es für Verbindungen aus einem brennbaren und einem nicht brennbaren Stoff nachgewiesen ist, dass bei brennbaren Körpern die Vereinigung nur unter Wärmeaufnahme und nicht unter Wärmeentwickelung stattfindet, so dass also die Verbrennungswärme der Verbindung grösser ist, als die der Componenten. Es kann demnach der allgemeine Ausdruck des Gesetzes immer beibehalten werden, wenn wir relative Werthe einführen und die algebraische Summe nehmen.

Indem wir damit die Betrachtung der chemischen Processe abbrechen, erwähne ich noch eine Bemerkung von Kopp (II p. 229): „Die genaue Messung der Wärmewirkungen bei chemischen Verbindungen ist an sich schon sehr schwierig. Namentlich aber ist es sehr schwierig und in vielen Fällen jetzt noch nicht erreichbar, zu ermitteln, welcher Theil der in einem solchen Falle unmittelbar beobachteten Wärmewirkung lediglich auf Rechnung des chemischen Vorganges und welcher auf Rechnung gleichzeitig stattfindender Aenderungen des Aggregatzustandes zu schreiben sei. — Diesen Schwierigkeiten ist es zuzuschreiben, dass, so vielfache Bearbeitung die Wärmewirkungen bei chemischen Verbindungen auch gefunden haben, doch verhältnissmässig nur wenige Resultate mit einiger Sicherheit bekannt sind."

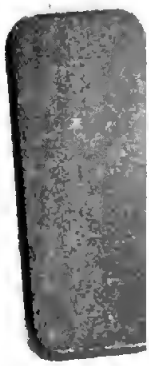
Auch die Processe der organischen Natur müssen unter das Gesetz der Erhaltung der Kraft fallen und damit den allgemeinen mechanischen Principien unterliegen.

In Bezug darauf ist die Erscheinung interessant, welche Meyer zur Aufstellung seines Theorèmes geführt hat; es bemerkte nämlich derselbe bei Aderlässen, die er 1840 auf Java an Europäern vornahm, dass das Blut auffallend roth war.

Das Leben der Pflanzen müssen wir uns denken als eine Uebertragung von lebendiger Kraft, welche in den Sonnenstrahlen enthalten ist, in chemische Spannkraft, indem sie vor Allem die Kohlensäure reduciren und dadurch in sich chemische Spannkraft deponiren, deren Aequivalent uns als Wärme bei der Verbrennung der Pflanzensubstanzen geliefert wird. Die Thiere nehmen die complicirten oxydabeln Verbindungen, welche von den Pflanzen erzeugt werden, und Sauerstoff in sich auf, geben dieselben meist verbrannt als Kohlensäure und Wasser, theils auf einfachere Verbindungen reducirt, wieder von sich, verbrauchen also eine gewisse Quantität chemischer Spannkraft und erzeugen dafür Wärme und mechanische Arbeit, so dass also der arbeitende organische Körper sich von einer Dampfmaschine nur insofern unterscheidet, als letztere weniger wählerisch in Bezug auf die zu verbrennenden Stoffe ist.

Damit sind wir berechtigt, anzunehmen, dass all unsere Kraft, welcher wir unser Leben und unsere Bewegung verdanken, uns einzig von der Sonne kommt und wir können also, wie Helmholtz in seiner Abhandlung über die Transformation der Naturkräfte sagt, mit demselben Rechte wie der Kaiser von China unsere Abstammung auf die Sonne zurückführen, aber müssen gleichzeitig zugeben, dass desselben Adels sich die Kröte und der Blutegel erfreuen. Für den Naturforscher aber entsteht die schwierige Aufgabe, die Kräfte einer Messung zu unterwerfen oder auch nur erst ein gemeinsames Maass aufzufinden, um die Hypothesis über die Erhaltung der Kraft immer mehr zu begründen und auch in die Natur der Kräfte einzudringen, damit, wie Jacobi p. 4 sagt, man Alles reduciren kann auf gegenseitige Anziehungen und Abstossungen.

SBN 043044 Biblioteca Nazionale Napoli



Digitized by Google

BIBLIOTECA